

Синергетика
От прошлого
к будущему



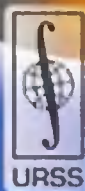
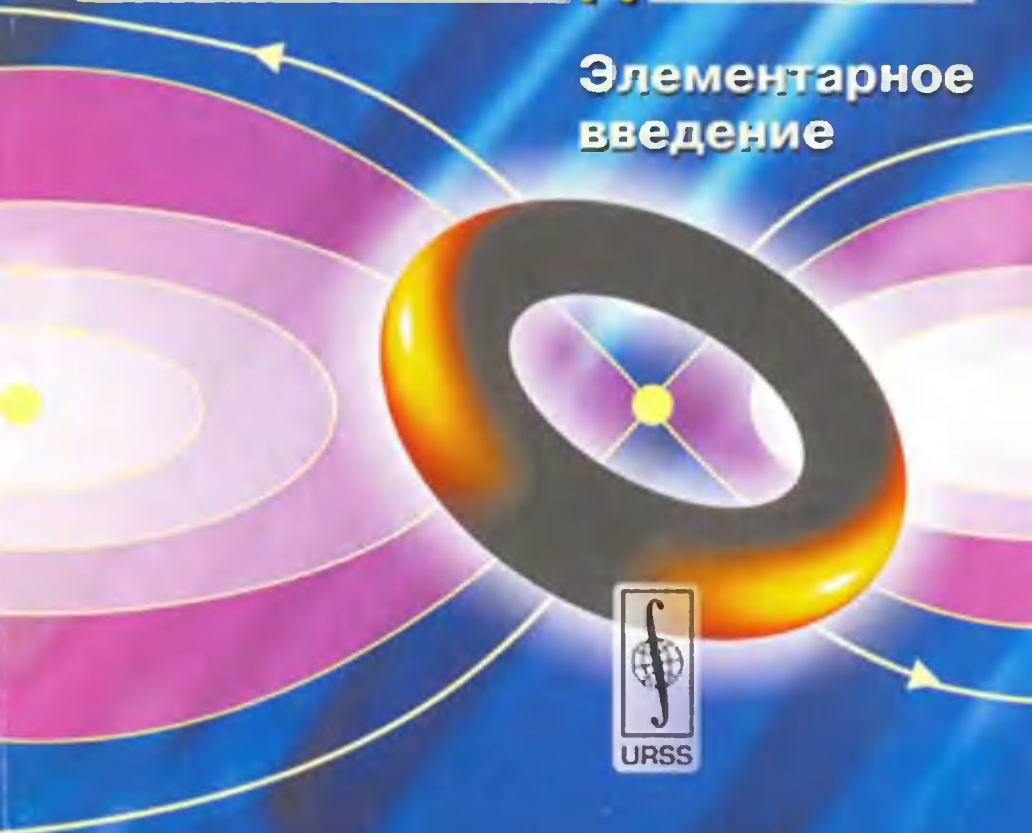
ЛЕКЦИИ

Ю. А. Данилов

ПО

НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

**Элементарное
введение**



URSS

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

Ю.А.Данилов

ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Элементарное введение

Рекомендовано в качестве учебного пособия
для студентов физико-математических
и физико-химических специальностей вузов

Издание второе, исправленное

МОСКВА



URSS

ББК 22.318

Данилов Юлий Александрович

Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение: Учебное пособие /
Предисл. Г. Г. Малинецкого. Изд. 2-е, испр. — М.: КомКнига, 2006.
208 с. (Синергетика: от прошлого к будущему.)

ISBN 5–484–00183–8

В основу настоящего учебного пособия легли лекции, которые выдающийся ученый, педагог, популяризатор науки Юлий Александрович Данилов читал на химическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, на «Нелинейных днях для молодых» в СГУ им. Н. Г. Чернышевского, а также в МИФИ и университетах Западной Европы. В пособии подробно изложены дискретные отображения и теория непрерывных систем, хаотическое поведение, фрактальная теория и степенные законы, синергетика и эргодическая теория.

Отличительной особенностью курса является конкретность (доведение формул до вида, удобного для практических расчетов) и точное изложение основных понятий, обычно приводимых без определений.

Для студентов и аспирантов физико-математических, биологических и химических специальностей, а также для всех, кто интересуется современным состоянием науки о поведении сложных систем различной природы (от физических до социальных, экономических и т. п.).

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Подписано к печати 28.10.2005 г. Формат 60×90/16. Бумага типографская.
Печ. л. 13. Зак. № 270.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 5–484–00183–8

© Ю. А. Данилов, 2001, 2006
© КомКнига, 2006

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
	Тел./факс: 7 (095) 135–42–16
	URSS Тел./факс: 7 (095) 135–42–46

3379 ID 29805



9 785484 001835 >

Оглавление

От редакции	8
Предисловие.	
<i>Ясность, красота, гармония (Г. Г. Малинецкий)</i>	12
Лекция 1	
<i>Что такое нелинейная динамика?</i>	16
Введение	16
Принцип суперпозиции	18
Нелинейное мышление Л. И. Мандельштама	19
Дискретные отображения	21
Наследственные свойства итераций	22
k -цикл	23
Треугольное отображение	23
Сдвиги Бернулли	24
<i>Вопросы и упражнения к лекции 1</i>	<i>27</i>
Лекция 2	
<i>Квадратичное отображение</i>	28
Квадратичное отображение	28

Неподвижные точки	28
Устойчивость неподвижной точки	29
Экстремум	30
Универсальности Фейгенбаума	34
Порядок Шарковского	37
Двумерные дискретные отображения.	
Кошка Арнольда	38
Гиперболичность	41
Неподвижные точки отображения «кошка Арнольда» . .	43
Топологически сопряженные отображения	47
<i>Вопросы и упражнения к лекции 2</i>	48

Лекция 3

<i>Непрерывные системы</i>	50
Сечение Пуанкаре	52
Индекс Пуанкаре	53
Остов фазового портрета	55
Система Лоренца	56
Свойства системы Лоренца	58
Неподвижные точки системы Лоренца	61
Устойчивость по Ляпунову	62
<i>Вопросы и упражнения к лекции 3</i>	67

Лекция 4

<i>Еще один взгляд на систему Э. Лоренца</i>	68
Качественные признаки хаоса	74
Количественные меры хаоса	78
Показатель Ляпунова	79
Примеры вычисления показателя Ляпунова	81
<i>Вопросы и упражнения к лекции 4</i>	82

Лекция 5

<i>Количественные меры хаоса</i>	83
Инвариантная плотность	83
Корреляционная функция	88
Фрактальные размерности	89
Что же такое фрактал?	91
Размерность Хаусдорфа—Безиковича	92
Размерности Реньи	94
<i>Вопросы и упражнения к лекции 5</i>	95

Лекция 6

<i>Количественные меры хаоса (продолжение)</i>	96
Топологическая сопряженность	96
Эмпирические фрактальные размерности	97
Гипотеза Х. А. Лоренца и спектральная размерность	99
<i>Вопросы и задачи к лекции 6</i>	101

Лекция 7

<i>Геометрически регулярные фракталы</i>	103
Канторовская пыль	103
Ломаная и снежинка фон Коха	104
Салфетка Серпинского	105
Ковер Серпинского	106
Трехмерный аналог салфетки Серпинского	107
Губка Серпинского	108
<i>Вопросы и упражнения к лекции 7</i>	110

Лекция 8

<i>Мультифракталы</i>	111
Условие Липшица	117
<i>Вопросы и упражнения к лекции 8</i>	118

Лекция 9

<i>Процессы на фрактальных средах</i>	119
Диффузия	119
Производная и интеграл дробного порядка	121
Интеграл дробного порядка	122
Оператор отражения	123
Волновые процессы во фрактальных средах	124
Колесания во фрактальной среде	125
Моделирование траектории броуновской частицы	127
<i>Вопросы и упражнения к лекции 9</i>	129

Лекция 10

<i>Подобие и аффинные преобразования</i>	130
Преобразование подобия	130
Аффинные преобразования	132
Последовательность Морса—Туэ	134
Анализ размерности	136
Автомодельные решения	141
Уравнение теплопроводности (диффузии)	142
Уравнение Бюргерса	144
Уравнение Кортевега—де Фриса	145
<i>Вопросы и упражнения к лекции 10</i>	147

Лекция 11

<i>Метод Софуса Ли</i>	148
Теория продолжения	150
Первое продолжение	151
Второе продолжение	151
<i>Вопросы и упражнения к лекции 11</i>	160

Оглавление

Лекция 12

Метод Софуса Ли (продолжение) 162

Эргодичность и перемешивание 171

Вопросы и упражнения к лекции 12 174

Лекция 13

Солитоны 176

Данные рассеяния 179

Вопросы и упражнения к лекции 13 192

Лекция 14

КАМ-теория 193

Интегрируемая гамильтонова система 193

Гармонический осциллятор 194

Возмущение интегрируемого гамильтониана 197

Гомоклинический хаос 198

Вопросы и упражнения к лекции 14 200

Литература 202

От редакции

Издательство URSS продолжает новую серию книг «Синергетика: от прошлого к будущему».

Синергетика, или теория самоорганизации, сегодня представляется одним из наиболее популярных и перспективных междисциплинарных подходов. Термин синергетика в переводе с греческого означает «совместное действие». Введя его, Герман Хакен вкладывал в него два смысла. Первый — теория возникновения новых свойств у целого, состоящего из взаимодействующих объектов. Второй — подход, требующий для своей разработки сотрудничества специалистов из разных областей.

Но это привело и к замечательному обратному эффекту — синергетика начала оказывать все большее влияние на разные сферы деятельности и вызывать все больший интерес. Сейчас этим подходом интересуются очень многие — от студентов до политиков, от менеджеров до активно работающих исследователей.

Синергетика прошла большой путь. Тридцать лет назад на нее смотрели как на забаву физиков-теоретиков, увидевших сходство в описании многих нелинейных явлений. Двадцать лет назад, благодаря ее концепциям, методам, представлениям, были экспериментально обнаружены многие замечательные явления в физике, химии, биологии, гидродинамике. Сейчас этот

междисциплинарный подход все шире используется в стратегическом планировании, при анализе исторических альтернатив, в поиске путей решения глобальных проблем, вставших перед человечеством.

Название серии «Синергетика: от прошлого к будущему» тоже содержательно. Как говорил один из создателей квантовой механики, при рождении каждая область обычно богаче идеями, чем в период зрелости. Видимо, не является исключением и синергетика. Поэтому мы предполагаем переиздать часть «синергетической классики», сделав акцент на тех возможностях и подходах, которые пока используются не в полной мере. При этом мы надеемся познакомить читателя и с рядом интересных работ, ранее не издававшихся на русском языке.

«Настоящее» — как важнейший элемент серии — тоже понятно. В эпоху информационного шума и перманентного написания то заявок на гранты, то отчетов по ним, даже классики синергетики очень немного знают о последних работах коллег и новых приложениях. Мы постараемся восполнить этот пробел, представив в серии исследования, которые проводятся в ведущих научных центрах страны.

«Будущее...» — это самое важное. От того, насколько ясно мы его представляем, зависят наши сегодняшние усилия и научная стратегия. Прогнозы — дело неблагодарное, — хотя и совершенно необходимое. Поэтому ряд книг серии мы надеемся посвятить и им.

В редакционную коллегию нашей серии любезно согласились войти многие ведущие специалисты в области синергетики и нелинейной динамики. В них не следует видеть «свадебных генералов». В их задачу входит анализ развития нелинейной динамики в целом и ее отдельных областей, определение приоритетов нашей серии и подготовка предложений по изданию конкретных работ. Поэтому мы указываем в книгах серии

не только организации, в которых работают эти исследователи, но и важнейшие области их научных интересов.

И, конечно, мы надеемся на диалог с читателями. При создании междисциплинарных подходов он особенно важен. Итак, вперед — в будущее.

В нашей серии уже вышло около двух десятков книг общим тиражом около сорока тысяч экземпляров. Серия начала издаваться на испанском языке. Однако мы уверены, что и самые глубокие проблемы синергетики, и самые интересные книги серии впереди.

*Редакционная коллегия серии
«Синергетика: от прошлого к будущему»*

Председатель редколлегии:

Г. Г. Малинецкий, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (сложность, хаос, прогноз).

Члены редколлегии:

Р. Г. Баранцев, Санкт-Петербургский гос. университет (асимптотология, семидинамика, философия естествознания).

А. В. Гусев, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (вычислительная гидродинамика, технологии, медицина).

А. С. Дмитриев, Институт радиоэлектроники РАН (динамический хаос, защита информации, телекоммуникации).

В. П. Дымников, Институт вычислительной математики РАН (физика атмосферы и океана, аттракторы большой размерности).

С. А. Кащенко, Ярославский гос. университет им. П. Г. Демидова (асимптотический анализ нелинейных систем, образование, инновации).

И. В. Кузнецов, Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН (анализ временных рядов, вычислительная сейсмология, клеточные автоматы).

А. Ю. Лоскутов, Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова (эргодическая теория, билиарды, фракталы).

И. Г. Поспелов, Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
(развивающиеся системы, математическая экономика).

Ю. Д. Третьяков, Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова
(наука о материалах и наноструктуры)

Д. И. Трубецков, Саратовский гос. университет им. Н. Г. Чернышевского
(теория колебаний и волн, электроника, преподавание синергетики).

Д. С. Чернавский, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН (биофизика, экономика, информация).

Наш электронный адрес — synergy@keldysh.ru

Предисловие

Ясность, красота, гармония

Вы держите в руках удивительную книгу. На мой взгляд, это один из самых блестящих курсов нелинейной динамики в мировой литературе. Он как бы воплощает единство противоположностей и находит для каждой идеи, теории, задачи ее «естественную меру». Подобной гармонии, цельности и соразмерности иногда удается добиться в выдающихся художественных произведениях, но их почти никогда не увидишь в учебниках и курсах лекций. Эта книга — счастливое исключение.

Судите сами.

Во-первых, книга своим существованием показывает, что основы синергетики — бурно развивающегося в последние годы междисциплинарного подхода — доступны старшеклассникам. И это очень важно, потому что междисциплинарность подразумевает участие в решении важных и интересных общих задач не только математиков и физиков, но и химиков, биологов, социологов, психологов, представителей еще многих научных дисциплин. То есть людей, которые не имели возможности прослушать большие фундаментальные курсы математического анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, математической физики. Но которым, тем не менее,

очень важно знать, что умеют «нелинейщики», на каком языке они говорят. С другой стороны, ряд примеров, доказательств, метафор настолько оригинален и красив, что и профессионалы в области нелинейной науки откроют в этой книге много неожиданного для себя.

Во-вторых, это поразительно короткая и содержательная книга. Думаю, что до выхода в свет ее первого издания научное сообщество не подозревало, что о тех сущностях, которым посвящена книга, можно написать так коротко, понятно и точно. Поэтому полагаю, что книга станет настольной и для многих студентов, и для многих лекторов.

В-третьих, эта книга поразительно цельна и гармонична. На мой взгляд, она по-пушкински ясна и легка. В эпоху специализации, когда основная часть исследователей трудится над своими узкими конкретными проблемами, не поднимая головы, это особенно ценно. Прежде всего потому, что за междисциплинарностью, целостной гармоничной картиной мира — будущее. Без них научное познание утратит красоту, очарование, а потом и силу. Читая эти лекции, постоянно ловишь себя на том, что форма здесь идеально соответствует содержанию предмета.

Почему же получилась такая удивительная работа? Ответ связан с удивительной личностью ее автора — Юлия Александровича Данилова. У этого выдающегося человека было много прекрасных качеств.

Но одно мне представляется особенно редким и ценным. Он умел ценить, радоваться и восхищаться успехами и достижениями собратьев по научному цеху. Независимо от времени, когда жил творец, от его статуса. Он одинаково вдохновенно говорил об изобретательности Клавдия Птолемея и об оригинальной идее аспиранта, выступавшего на вчерашнем семинаре. Кто-то из классиков советовал ценить науку в себе, а не себя в науке. Юлий Александрович прекрасно умел ценить науку

и в других. И это сыграло очень большую роль в становлении «нелинейного научного сообщества» в нашей стране.

После многих разговоров с ним я остро чувствовал, что именно в нем идея междисциплинарности, «синергетичность» мировоззрения воплощены с огромной полнотой. Зная около 20 европейских языков, он с удовольствием рассказывал об особенностях каждого из них. Он глубоко чувствовал эту грань культуры и она его очень радовала. Переведя 110 книг с разных языков, он не утратил свежести восприятия, а напротив, начал видеть и ценить те нюансы и повороты и в научной мысли, и в языке, которые обычно недоступны простым смертным.

Ю. А. Данилов и переводил классиков науки, и много о них писал. Он говорил о Ньюtone, Лейбнице, Птолемеe, Гамильтоне так, как говорят о современниках. Это определило и масштаб идей, которые были близки Юлию Александровичу, и способность отсекаать все лишнее. Это удивительное сочетание выдающихся и редких качеств ума и характера и позволило родиться «Лекциям по нелинейной динамике».

Предостерегу читателя. Несмотря на название, это совсем не те лекции, которые Юлий Александрович блистательно читал в Саратове на «Нелинейных днях для молодых», в Курчатовском институте или на химическом факультете МГУ. Это совсем другой, особый жанр.

Мне посчастливилось слушать многие лекции Ю. А. Данилова. В том числе и на одну и ту же тему. Каждая их них была маленьким шедевром, не похожим на предыдущую. Юлий Александрович был блестящим импровизатором. Вопрос из аудитории мог заставить его раскрыть тему с совершенно другой, неожиданной стороны. Он стремился донести не только красоту и величие научных идей, но и неповторимый облик их творцов. В свое время мы много говорили с ним еще об одной его книге в нашей серии — «Творцы нелинейной динамики»... Не сло-

жилося. Надеюсь, что его «настоящие», «прочитанные» лекции или хотя бы какая-то их часть увидит свет.

Помнится, когда я первый раз увидел те «Лекции», которые вы держите в руках, то сразу позвонил Юлию Александровичу:

— А где же поэзия? Где прекрасные лирические отступления? Где Вы, Ваше личное отношение?

— Да, сокращать было трудно и жалко. Но издатели очень настаивали. А поэзия должна быть в самом предмете, в стиле, а не в украшениях, как бы дороги они нам не были.

Но прошло совсем немного времени и стало понятно, что эта книга — особый жанр. В ее основе действительно лежат читавшиеся лекции. Но преображенные, больше похожие на сверкающий кристалл, поблескивающий на солнце, чем на горячую, темпераментную, блестящую речь вдохновенного педагога.

Напечатанные лекции — сложный жанр. Смесь объективного — самого предмета и субъективного — преломления его в изложении лектора. Здесь есть много блистательных образцов от многотомных, подробных, детально проясняющих суть предмета лекций Л. И. Мандельштама, по которым «учили» теорию колебаний многие поколения исследователей до конспектов лекций Ферми по квантовой механике, где за формулами надо угадывать мысль автора. От Зигмунда Фрейда, пытавшегося передать в ясных и четких словах зыбкое и неуловимое, до «Фейнмановских лекций по физике», где величие и красота предмета сливается с обаянием автора курса.

Юлий Александрович, как настоящий мастер, предложил свое видение этого жанра, свой угол зрения, свое прочтение синергетики. Не сомневаюсь, что оно будет вдохновлять многих долгие-долгие годы.

Председатель редколлегии серии
«Синергетика — от прошлого к будущему»

Г. Г. Малинецкий

Лекция 1

Что такое нелинейная динамика?

Введение

Нелинейная динамика — раздел современной математики, занимающийся исследованием нелинейных динамических систем.

Под *динамической системой* условились понимать систему любой природы (физическую, химическую, биологическую, социальную, экономическую и т. д.), состояние которой изменяется (дискретно или непрерывно) во времени.

Нелинейная динамика использует при изучении систем нелинейные модели — чаще всего дифференциальные уравнения и дискретные отображения.

Дать точное определение того, что составляет предмет нелинейной динамики ничуть не легче, чем определить, что составляет предмет теории колебаний. Перефразируя Л. И. Мандельштама («Лекции по теории колебаний»), можно сказать, что «было бы бесплодным педантизмом стараться „точно“ определить, какими именно процессами занимается теория колебаний. Важно не это. Важно выделить руководящие идеи, основные общие закономерности».

Следует подчеркнуть, что нелинейной называется теория, в частности нелинейная теория динамических систем, использующая нелинейные математические модели. Но нелинейная теория не обязательно ограничивается изучением нелинейных явлений или закономерностей.

Мир нелинейных закономерностей, или функций, так же, как и стоящий за ним мир нелинейных явлений, страшит, покоряет и неотразимо манит своим неисчерпаемым разнообразием. Здесь нет места чинному стандарту, здесь безраздельно господствует изменчивость и буйство форм. То, что точно схватывает и передает характерные особенности одного класса нелинейных функций, ничего не говорит даже о простейших особенностях типичного представителя нелинейных функций другого класса. Геометрический образ нелинейной функции — кривая на плоскости, искривленная поверхность или гиперповерхность в пространстве трех или большего числа измерений. На одинаковые приращения независимой переменной одна и та же нелинейная функция откликается по-разному в зависимости от того, какому значению независимой переменной придается приращение. Почти полным «безразличием» к изменению одних и повышенной чувствительностью к изменению других значений независимой переменной нелинейные функции разительно контрастируют с линейными функциями. Любая линейная функция откликается на приращение независимой переменной одним и тем же приращением своего значения, в какой бы части области определения ни находилось то значение независимой переменной, которой придается приращение. Именно здесь и проходит демаркационная линия между миром линейных и нелинейных явлений.

Границу между линейными и нелинейными теориями принято проводить по иному признаку. Теория считается линейной или нелинейной в зависимости от того, какой — линейный или нелинейный — математический аппарат, какие — линейные или нелинейные — математические модели она использует.

Физики прошлого пребывали в уверенности, что именно линейная теория дает главный член бесконечного ряда последовательных приближений к истине, а нелинейности отводится скромная роль косметики на прекрасном лице линейной теории, вместилища всевозможных поправок, не меняющих сколько-нибудь существенно выводы линейной теории. Их уверенность в этом укрепляли блестящие успехи линейной теории, и в первую очередь, ее высшее достижение — электродинамика Максвелла.

Отпечаток распространенного некогда заблуждения относительно якобы главенствующей роли линейности в окружающем нас мире несет на себе сам термин «нелинейность»: его создатели сочли первичной линейность, а нелинейность восприняли как нечто вторичное, производное от линейности, и определили через отрицание последней. Современный физик, доведись ему заново создавать определение столь важной сущности, как нелинейность, скорее всего, поступил бы иначе, и, отдав предпочтение нелинейности как более важной и распространенной из двух противоположностей, определил бы линейность как «не нелинейность». Доведенный усилиями не одного поколения математиков до высокой степени совершенства, линейный математический аппарат взят физиками на вооружение и до тонкости освоен так давно, что стал неотъемлемым элементом их математической культуры, вошел в плоть и кровь, обрел почти осязаемые формы в виде целой серии насыщенных яркими физическими идеями и образами сущностей, позволяющими физiku, минуя тяготы вычислений, интуитивно предугадывать ответ.

Принцип суперпозиции

Неповторимая отличительная особенность линейной теории, безвозвратно утрачиваемая при переходе к нелинейной

ступени познания, — *принцип суперпозиции* — позволяет физики конструировать любое решение из определенного набора частных решений.

Физики, делавшие первые, еще неуверенные шаги в области нелинейного, где все было «не так», все противоречило устоявшимся линейным представлениям и линейной интуиции, питали надежду, что милый их сердцу линейный математический аппарат путем различного рода ухищрений удастся приспособить к решению новых нелинейных задач. Тех, кто так полагал, ожидало разочарование: линейный математический аппарат отторгал чужеродную ткань нелинейных дополнений. «Искусственная линеаризация» оказывалась малоэффективной, «большей частью ничему не научала, а иногда бывала прямо вредной» (Л. И. Мандельштам).

Нелинейное мышление Л. И. Мандельштама

Неправомерное перенесение линейного опыта на нелинейную почву не только лишено последовательности и наносит ущерб эстетической привлекательности теории (тем самым сигнализируя о нарушении сформулированного П. А. Дираком критерия математической красоты физической теории), но и чревато грубым искажением существа происходящих процессов. Руководствуясь показаниями ставшего ненадежным компаса линейной теории, нетрудно впасть в ошибку и проглядеть важный эффект, не имеющий линейных аналогов.

Уже на подступах к бескрайним просторам нелинейности исследователь, как правило, вынужден отказаться от линейных вех, способных скорее дезориентировать, чем указывать верное направление. Не располагая готовым математическим аппаратом или не успев выбрать подходящее оружие в обширном арсенале математических средств и методов, физик порой встает

на путь своего рода «математического старательства» и принимается решать нелинейные проблемы «поштучно», используя их специфические индивидуальные особенности. Л. И. Мандельштам в предисловии к первому изданию знаменитой (и много-страдальной) «Теории колебаний» А. А. Андропова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина писал:

Тот путь, конечно, сам по себе правилен. Идя по нему, ряд исследователей получил весьма ценные результаты, сохранившие свое значение и в настоящее время. И сейчас, иногда, удобно в том или ином случае идти по этому пути.

Но не говоря уже о том, что фактически такие решения разрозненных отдельных задач не имели достаточного математического обоснования, весь этот путь в качестве, так сказать, большой дороги вряд ли целесообразен, так как он не ведет к установлению тех общих точек зрения, той базы, как математической, так и физической, которая необходима для достаточно полного и всестороннего охвата области нелинейных колебаний в уже известной нам ее части, и, что еще важнее, для успешного дальнейшего планомерного развития.

Выделенные курсивом слова «нелинейных колебаний» не уменьшают общности утверждения. Их следует читать как «нелинейной физики», ведь они принадлежат Л. И. Мандельштаму.

Чтобы не влачить жалкое существование приживалки линейной теории и не быть низведенной до положения ученой хранительницы обширного собрания разрозненных решенных задач, нелинейная физика должна была обрести внутреннее единство и автономию от своей предшественницы — линейной физики. Необходимо создать «нелинейную культуру, включающую надежный математический аппарат и физические представления, адекватные новым задачам, выработать нелинейную интуицию, годную там, где оказывается непригод-

ной интуиция, выработанная на линейных задачах» (А. А. Андронов).

Основоположником и создателем нелинейного физического мышления стал замечательный физик — академик Л. И. Мандельштам.

Итак, приступаем к изучению математических моделей нелинейной динамики. Начнем мы с простейших моделей — дискретных отображений.

Дискретные отображения

Важным классом простейших математических моделей, обслуживающих потребности нелинейной физики, и, в частности, нелинейной динамики, служат *дискретные отображения*

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n), \quad (1.1)$$

где n — номер приближения (дискретное время), $n = 0, 1, 2, \dots$; \mathbf{x}_0 — начальное или нулевое приближение. Вид функции f , ее область определения и область значений определяются экспериментальными данными, \mathbf{x}_0 — число, экспериментальное значение, принимаемое за начальное. Повторное действие f на \mathbf{x}_0 называется итерацией (с соответствующим номером). K -я итерация — есть действие функции f на $(k - 1)$ -е приближение \mathbf{x}_{k-1} или, что то же, действие k раз повторенной функции f на \mathbf{x}_0 :

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) = \underbrace{f(f(f \dots (f(\mathbf{x}_0) \dots))}_{k \text{ раз}}). \quad (1.2)$$

Подчеркнем, что k -я итерация — не k -я степень функции f , а результат k -кратной суперпозиции (повторного дей-

ствия функции f на x_0). Например, если $f = Ax + B$, то $f^{(k)}$ — линейная функция от x_0 , а не многочлен k -й степени!

Важную роль в теории дискретных отображений играют так называемые *неподвижные точки*, переходящие под действием отображения f в себя:

$$x^* = f(x^*) \quad (1.3)$$

(геометрически неподвижная точка x^* отображения есть точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с биссектрисой $y = x$).

Неподвижные точки подразделяются на *устойчивые* (притягивающие) и *неустойчивые* (отталкивающие). Критерием устойчивости служат неравенства (если производная в точке x^* существует)

$$|f'(x^*)| < 1 \quad (1.4)$$

— неподвижная точка x^* устойчива;

$$|f'(x^*)| > 1 \quad (1.5)$$

— неподвижная точка x^* неустойчива.

Если неподвижная точка x^* устойчива, то каждое последующее приближение (результат каждой последующей итерации) оказывается к ней ближе, чем предыдущее.

Если неподвижная точка x^* неустойчива, то каждое последующее приближение оказывается дальше от нее, чем предыдущее.

Наследственные свойства итераций

Условимся называть *наследственными* те свойства итераций, которые они получают (по наследству) от основного отображения.

***k*-цикл**

Конечное множество приближений, каждое из которых переходит в следующее под действием отображения f , называется *циклом* (длина цикла называется его *порядком*). k -цикл:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_0 & \xrightarrow{f} & x_1 & \xrightarrow{f} & x_2 & \xrightarrow{f} & \dots & \xrightarrow{f} & x_{k-1} \\
 \uparrow & & & & & & & & \uparrow \\
 & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & & \\
 & & & & k & & & &
 \end{array} \tag{1.6}$$

Треугольное отображение

Треугольное отображение, так же как и семейство сдвигов Бернулли (см. ниже), принадлежат к числу наиболее известных примеров дискретных (кусочно-линейных) отображений.

Как видно из рис. 1 а, у треугольного отображения

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{1.7}$$

существуют две неподвижные точки: $x_1^* = 0$ и x_2^* :

$$\begin{aligned}
 2(1-x_2^*) &= x_2^*, \\
 x_2^* &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Так как $|f'| = 2 > 1$, обе неподвижные точки неустойчивы.

Несмотря на кажущуюся обманчивую простоту треугольного отображения, его итерации ведут себя достаточно сложным

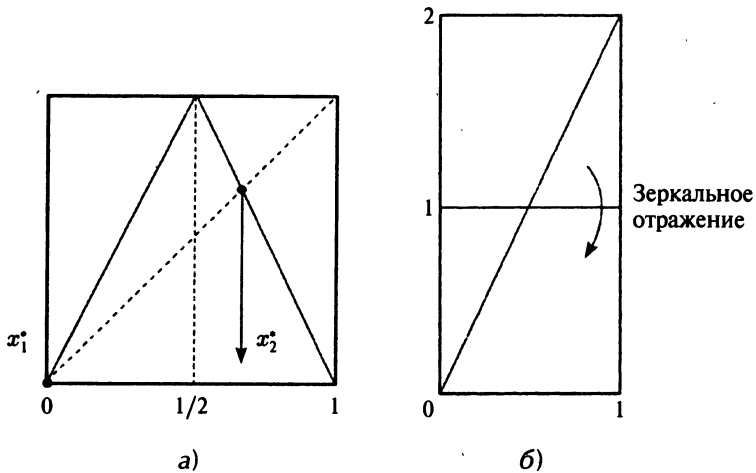


Рис. 1. а) треугольное отображение; б) треугольное отображение как результат растяжения и зеркального отражения от горизонтали на уровне $y = 1$

образом: близкие в начальный момент точки «разбегаются». Объясняется это тем, что треугольное отображение представляет собой результат наложения (суперпозиции) двух операций: растяжения по вертикали и зеркального отражения относительно горизонтали $y = 1$ (рис. 1 б).

Сдвиги Бернулли

Сдвигами Бернулли называется семейство дискретных (кусочно-линейных) отображений

$$x_{n+1} = r x_n \pmod{1}, \quad (1.9)$$

где r — целое число больше 1; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. В зависимости от значения коэффициента r различают r -ичный сдвиг Бернул-

ли (при произвольном $r > 1$, двоичный сдвиг Бернулли ($r = 2$), десятичный сдвиг Бернулли ($r = 10$) и т. д. График r -ичного сдвига Бернулли представлен на рис. 2.

Действие всех сдвигов Бернулли однотипно и может быть разделено на 2 такта: на первом такте (преобразовании подобия с коэффициентом подобия r) единичный отрезок $[0, 1]$ переходит в отрезок $[0, r]$, на втором такте условие $(\text{mod } 1)$ — взятие дробной части «разрезает» столбец из r выстроенных по вертикали единичных квадратов — образ единичного квадрата при отображении, реализуемом на первом такте, на r единичных квадратов и совмещает все квадраты, начиная со второго по вертикали, и выше, с исходным, нижним, единичным квадратом.

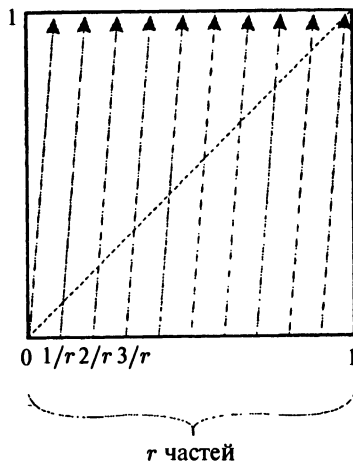


Рис. 2. Отображение r -ичный сдвиг Бернулли

На примере двоичного сдвига Бернулли ($r = 2$) процесс «преобразования подобия + $(\text{mod } 1)$ » представлен на рис. 3. Мы видим, что, как и в случае треугольного отображения (1.7), сдвиги Бернулли представляют собой результат суперпозиции двух операций: растяжения в $r > 1$ раз по вертикали и спуска в исходный единичный квадрат под действием операции взятия дробной части $(\text{mod } 1)$.

Проведя на рис. 2 биссектрису через точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$ (штриховая линия), мы получим r неподвижных точек, в каждой из которых

$$|f'(x^*)| = r > 1,$$

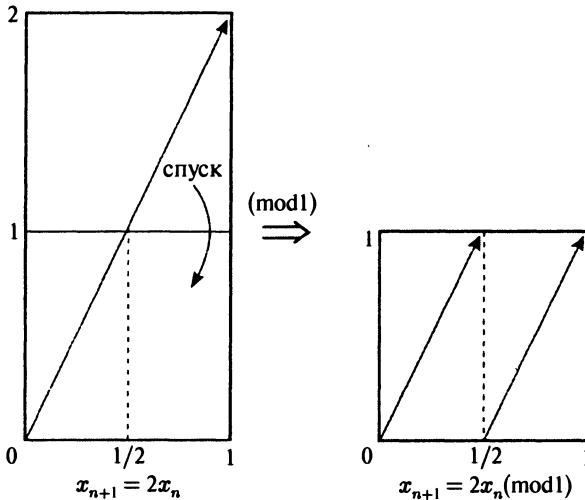


Рис. 3. Отображение двоичный сдвиг Бернулли как результат суперпозиции преобразования подобия (растяжение по вертикали в 2 раза) и спуска (mod 1) в единичный квадрат

т. е. все неподвижные точки r -ичного сдвига Бернулли неустойчивы.

Мы видим, что r -ичный сдвиг Бернулли отображает единичный отрезок $[0, 1]$ в единичный же отрезок $[0, 1]$.

Чтобы понять, почему семейство дискретных отображений (1.9) называется сдвигами Бернулли, запишем начальное значение $x_0 \in [0, 1]$ (правильная дробь) в виде дроби в r -ичной системе (в случае r -ичного сдвига Бернулли).

$$x_0 = 0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad (1.10)$$

или

$$x_0 = \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} + \dots + \frac{a_n}{r^n} + \dots \quad (1.11)$$

Подставив (1.11) в (1.9), получили после первого «такта» (преобразования подобия с коэффициентом подобия r):

$$rx_0 = a_1 + \frac{a_2}{r} + \frac{a_3}{r^2} + \dots + \frac{a_n}{r^{n-1}} + \dots \quad (1.12)$$

Даже если $a_1 \neq 0$, после операции $(\text{mod } 1)$ (взятия дробной части), целая часть числа (1.12) обратится в нуль, и мы получим

$$x_1 = 0, a_2 a_3 \dots a_n \dots, \quad (1.13)$$

т. е. r -ичную дробь, в которой по сравнению с исходной дробью (1.10) r -ичная запятая сдвинулась на один знак вправо.

Если нулевое приближение x_0 было известно с точностью до $(n + 1)$ -го знака, т. е. если достоверно известны были первые n знаков после r -ичной запятой, то после n итераций все известные знаки окажутся исчерпанными. Иначе говоря, два начальных значения, отличавшиеся в $(n + 1)$ -м r -ичном знаке, порождают n -е итерации, которые будут отличаться в первом r -ичном знаке после запятой.

Вопросы и упражнения к лекции 1

1. Доказать, что существование, устойчивость и неустойчивость — наследственные свойства неподвижных точек при итерациях.
2. Доказать, что итерации кусочно-линейных отображений кусочно линейны.
3. Доказать, что свойство точек быть экстремумом (но не именно максимумом или именно минимумом) отображения — наследственное.
4. Как выглядят графики итераций треугольного отображения и двоичного сдвига Бернулли?

Лекция 2

Квадратичное отображение

Квадратичное отображение

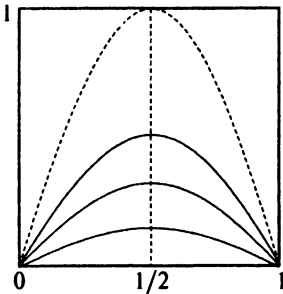


Рис. 4. Параболы
 $y = rx(1 - x)$ при
 $0 < r \leq 4$

Следующим по сложности за кусочно-линейными дискретными отображениями идет семейство квадратичных отображений (2.1), называемых также логистическими отображениями, или отображениями Ферхюльста (см. рис. 4). Единичный отрезок $[0, 1]$ они переводят в отрезок $[0, r/4]$.

$$y = rx(1 - x) \quad (2.1)$$

при $0 < r \leq 4$.

Неподвижные точки

Точка $x^* = 0$ существует при всех значениях параметра $r \in (0, 4]$.

Неподвижная точка $x_2^* \neq 0$

$$x_2^* = rx_2^*(1 - x_2^*), \quad (2.2)$$

$$1 = r(1 - x_2^*), \quad (2.3)$$

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{r}. \quad (2.4)$$

При $1/r > 1$ точка x_2^* располагается левее отрезка $[0, 1]$. Самое правое положение неподвижной точки x_2^* соответствует $r = 4$:

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad (2.5)$$

Устойчивость неподвижной точки

$$|y'| = |r(1 - x) + rx(-1)| = |-2rx + r|,$$

$$|y'(x_1^*)| = |r|.$$

Следовательно, неподвижная точка $x_1^* = 0$ устойчива при $r < 1$ и неустойчива при $r > 1$ (см. рис. 5).

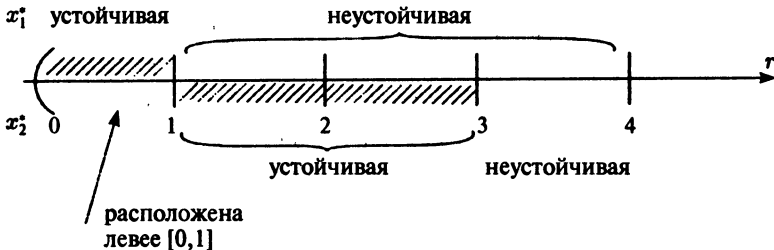


Рис. 5. Устойчивые и неустойчивые неподвижные точки квадратичного отображения (на оси параметра r)

$$|y'(x_2^*)| = \left| -2r \left(1 - \frac{1}{r} \right) + r \right| = |-2r + 2 + r| = |2 - r|.$$

Следовательно, неподвижная точка $x_2^* = 1 - (1/r)$ устойчива при $|2 - r| < 1$, т. е. при

$$1 < r < 3, \quad (2.6)$$

и неустойчива при

$$3 < r. \quad (2.7)$$

Экстремум

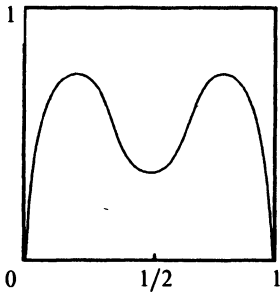


Рис. 6. Вторая итерация квадратичного отображения (минимум при $1/2$)

Так как парабола (2.1), задающая квадратичное, или логистическое, отображение, обращена ветвями вниз, она имеет единственный экстремум — максимум, расположенный на ее оси симметрии, т. е. при $x = 1/2$. Так как экстремум — наследственное свойство отображения, все итерации квадратичного отображения также обладают экстремумом при $x = 1/2$, но характер экстремума (максимум это или минимум) зависит от номера итерации. Например, в исходном отображении при $x = 1/2$ находится максимум, но во второй итерации при $x = 1/2$ располагается минимум (рис. 6).

И так как при $r \leq 4$

$$r - 4 \leq 0,$$

$y^{(2)}$ имеет действительные корни только при $x = 0$ и $x = 1$:

$$x_{1,2} = \frac{r \pm \sqrt{r(r-4)}}{2r}. \quad (2.8)$$

В окрестности неподвижной точки x_2^* квадратичного отображения f , наследуемой его второй итерацией $f^{(2)}$, при $r = 3$ возникает две новые неподвижные точки x_1 и x_2 (рис. 7), которым в исходном отображении соответствует 2-цикл. Сначала график второй итерации $f^{(2)}$ пересекает биссектрису под малым углом, и обе новые неподвижные точки второй итерации x_1 и x_2 (спутники неподвижной точки x_2^*) устойчивы, но в дальнейшем, при увеличении параметра r , график второй итерации пересекает биссектрису под все большим углом, и новые неподвижные точки x_1 и x_2 второй итерации становятся неустойчивыми (рис. 8).

В свою очередь в окрестности каждой из них появляются по две новые точки, образующие 2-цикл, элементы которого соответствуют неподвижным точкам итерации более высокого порядка. В пространстве $(0, 4]$ значений параметра r таких событий (возникновение в окрестности

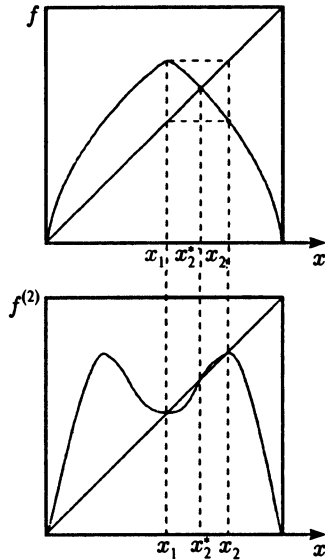
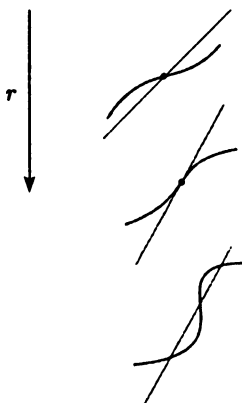


Рис. 7. Бифуркация удвоения периода: у второй итерации $f^{(2)}$ квадратичного отображения в окрестности неподвижной точки x_2^* появляются две новые неподвижные точки x_1 и x_2 (внизу), которым в самом отображении соответствует 2-цикл (вверху)

потерявшей устойчивость неподвижной точки одной итерации 2-цикла, элементы которого соответствуют новой неподвижной



точке итерации более высокого порядка) происходит бесконечно много. Вся бесконечная совокупность таких событий получила название каскад удвоений периода.

Рассмотрим начальный этап каскада удвоений периода. При $r < 3$ неподвижная точка

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$$

устойчива, так как

$$|f^{(1)'}|_{x=x_2^*} = |2 - r| < 1.$$

Рис. 8. Потеря устойчивости новыми неподвижными точками при увеличении параметра r : кривая все круче пересекает биссектрису

При $r = 3$ устойчивость неподвижной точки x_2^* становится нейтральной, а при $r > 3$ точка x_2^* становится неустойчивой и в ее окрестности появляются две новые неподвижные точки x_1

и x_2 второй итерации, образующие 2-цикл в первой итерации квадратичного отображения. По определению, устойчивые неподвижные точки притягивают к себе точки из некоторой своей окрестности, и называются поэтому аттракторами, а неустойчивые неподвижные точки оттягивают от себя точки из некоторой своей окрестности, и называются поэтому репеллерами. Наглядно происходящее можно представить себе так, как схематически показано на рис. 9.

Нетрудно видеть, что спутники утрачивают устойчивость при одном и том же значении параметра r . Пусть $r > 3$, и неподвижная точка x_2^* исходного отображения $f^{(1)}(x)$ утратила

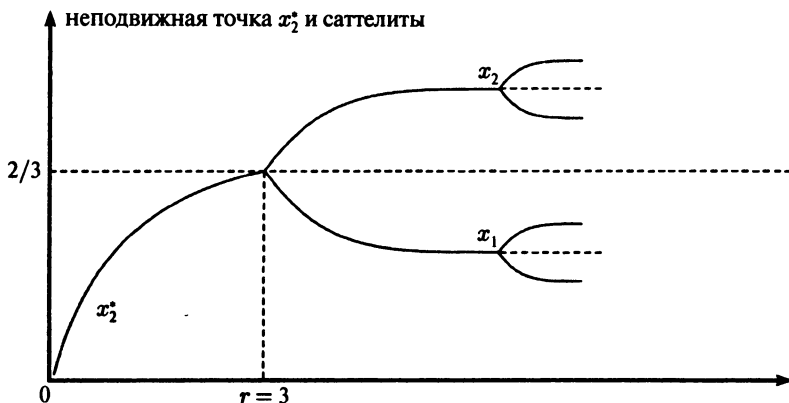


Рис. 9. Первые два удвоения периодов в квадратичном отображении

устойчивость, а в ее окрестности появились две новые неподвижные точки x_1 и x_2 второй итерации $f^{(2)}(x)$, образующие 2-цикл исходного отображения $f^{(1)}$:

$$\begin{array}{c} x_1 \xrightarrow{f} x_2, \\ \uparrow \quad \quad \downarrow \end{array} \quad (2.9)$$

или

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1), \\ x_1 &= f(x_2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Нетрудно видеть, что обе точки x_1 и x_2 соответствуют неподвижной точке второй итерации $f^{(2)}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_2) = f(f(x_1)) = f^{(2)}(x_1), \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_2)) = f^{(2)}(x_2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вычислим производные второй итерации $f^{(2)}$ в точках x_1 и x_2 :

$$[f^{(2)}(x)]'_{x=x_1} = f'(\underbrace{f(x_1)}_{x_2}) \cdot f'(x_1) = f'(x_2) \cdot f'(x_1), \quad (2.12)$$

где

$$[f^{(2)}(x)]'_{x=x_2} = f'(\underbrace{f(x_2)}_{x_1}) \cdot f'(x_2) = f'(x_1) \cdot f'(x_2), \quad (2.13)$$

Сравнивая (2.12) и (2.13), мы видим, что $[f^{(2)}(x)]'_{x=x_1}$ и $[f^{(2)}(x)]'_{x=x_2}$ совпадают с точностью до порядка сомножителей, и поэтому модули обоих производных либо оба больше единицы, либо оба меньше единицы. Иначе говоря, условия устойчивости и неустойчивости выполняются в точках цикла *одновременно* (при одном и том же значении параметра). (Мы ограничились рассмотрением 2-цикла только для краткости. Те же соображения остаются в силе и для циклов произвольной длины.)

Универсальности Фейгенбаума

На заре нелинейной динамики в 1930-х гг. скептики неоднократно высказывали опасения, что создать нелинейную теорию, охватывающую столь же широкий круг явлений, как линейная теория, невозможно и что нелинейные теории в лучшем случае будут представлять собой груды частных примеров, не допускающих сколько-нибудь широкого обобщения. Одним из контрпримеров, наглядно показывающих всю необоснованность подобных опасений, стало открытое американским физиком Митчеллом Фейгенбаумом явление универсальности,

охватывающее не только квадратичные, но и все унимодальные («одногорбые») отображения, удовлетворяющие условию

$$Sf < 0, \quad (2.14)$$

где

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{2}{3} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 - \text{производная Шварца.}$$

Исследуя квадратичное отображение с помощью микрокалькулятора, Фейгенбаум обнаружил, что неподвижная точка $x_2^* = 1 - (1/r)$, двигаясь при увеличении параметра r слева направо, достигает при $r = R_0 = 2$ уровня $x_2^* = 1/2$ (см. рис. 10). При дальнейшем движении направо, неподвижная точка x_2^* при $r = r_1 = 3$ утрачивает устойчивость, и в окрестности ее появляются две неподвижные точки второй итерации (спутники), образуя 2-цикл. Устойчивые в момент своего возникновения, точки 2-цикла движутся (при увеличении параметра r) направо и при некотором значении параметра $r = r_2$ одновременно (как показано в предыдущем разделе) теряют устойчивость, и в окрестности каждой возникает по паре новых точек, образующих 4-цикл. Траектории элементов циклов пересекают уровень $y = 1/2$ при значениях параметра $r = R_1, R_2$. Циклы, содержащие точки на уровне $y = 1/2$, называются суперустойчивыми.

В самом начале при значении r , близком к нулю, мы имеем только неподвижную точку x_2^* , т. е. 1-цикл, состоящий из одной-единственной неподвижной точки x_2^* . По миновании $r = r_1$ возникает 2-цикл, т. е. период удваивается. По миновании $r = r_2$ каждый элемент 2-цикла превращается в 2-цикл, т. е. мы получаем 4-цикл, или еще одно удвоение периода. Последовательность удвоений длин циклов при $r = r_i$ ($i = 1, 2, \dots$) называется каскадом удвоений периодов Фейгенбаума.

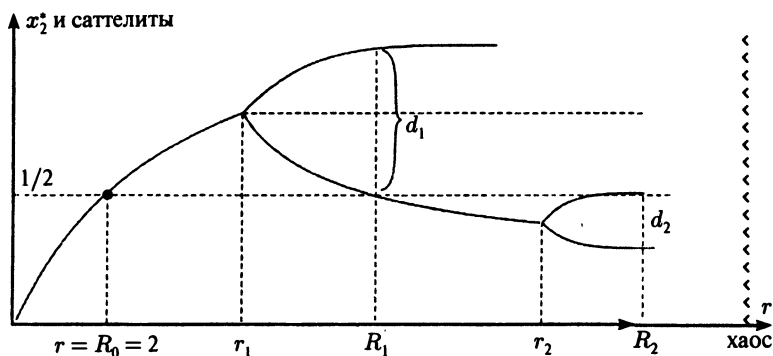


Рис. 10. Схематическое изображение каскада удвоений периодов Фейгенбаума (масштаб по оси параметра r не соблюден)

После того как происходит бесконечное число удвоений периода в системе, описываемой унимодальным отображением, наступает сложное хаотическое состояние. Но хаос в данном случае — не синоним отсутствия всякого порядка. Это состояние наделено тонкой структурой.

Как показал Фейгенбаум, для всех унимодальных отображений, удовлетворяющих условию (2.14), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} r_n &= r_\infty - \text{const}_1 \cdot \delta^{-n}, \\ R_n &= R_\infty - \text{const}_2 \cdot \delta^{-n}, \\ \frac{d_n}{d_{n+1}} &= a, \\ R_\infty = r_\infty &= 3,5699456 \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= 4,6692016091 \dots, \\ a &= 2,5029078750 \dots \end{aligned}$$

«цикл три рождает хаос». Ни теорема Шарковского, ни работа Ли—Йорка ничего не говорят об устойчивости циклов (онок периодичности).

Выяснилось, что обнаруженные Фейгенбаумом закономерности и значения параметров r (при которых аттракторы превращаются в репеллеры, и в окрестностях недавних аттракторов появляются 2-циклы), R (при которых траектории подвижных точек достигают уровня $y = 1/2$), δ , δ_1 и a универсальны для всех унимодальных (т. е. «одногорбых») отображений, удовлетворяющих не очень ограничительному условию (2.14).

Двумерные дискретные отображения. Кошка Арнольда

Дискретные отображения бывают не только одномерными, но и большей размерности. Рассмотрим одно из наиболее известных двумерных отображений, получившее название «кошка Арнольда»:

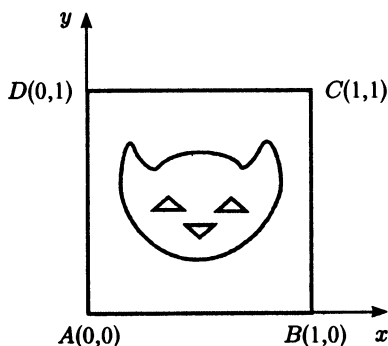


Рис. 11. Отображение «кошка Арнольда»

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Его можно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{1}, \quad (2.17)$$

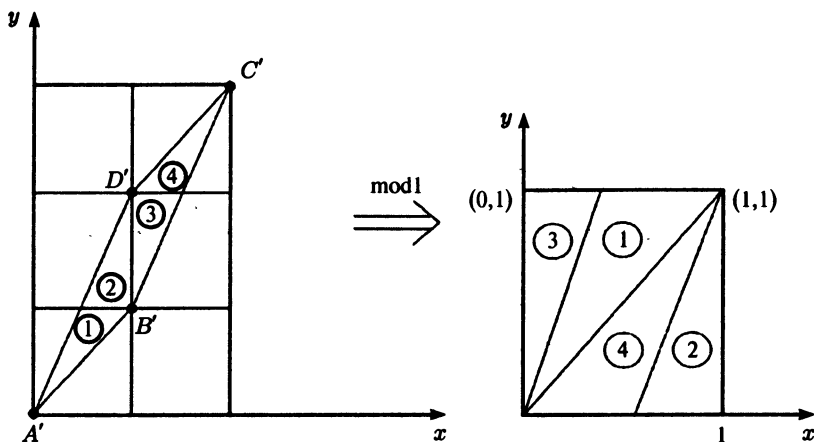


Рис. 12. Растяжение и перекладывание фрагментов, порождающие «кошку Арнольда»

где T — матрица преобразования:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Собственные значения преобразования T удовлетворяют характеристическому уравнению:

$$\det |T - \lambda E| = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = \quad (2.19)$$

$$= (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad (2.20)$$

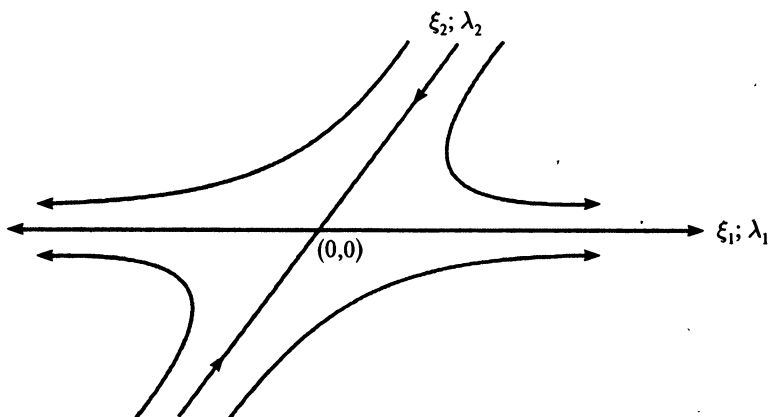


Рис. 13. Гиперболическая неподвижная точка

$$\lambda_2 = \frac{2}{3 \pm \sqrt{5}} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (2.21)$$

Корни взаимно обратны:

$$\lambda_1 > 1; \quad (2.22)$$

$$\lambda_2 < 1. \quad (2.23)$$

Произведение корней $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ (по теореме Виета оно равно свободному члену характеристического уравнения (2.19)). В окрестности неподвижной точки $(0, 0)$ «кошка Арнольда» ведет себя как растяжение с коэффициентом λ_1 вдоль собственного направления ξ_1 , соответствующего собственному значению λ_1 , и как сжатие с коэффициентом λ_2 вдоль собственного направления ξ_2 , соответствующего собственному значению λ_2 (рис. 13). В окрестности собственных направлений точки, под действием преобразования «кошка Арнольда», движутся по гиперболам, поэтому неподвижная точка $(0, 0)$ и аналогич-

ные ей неподвижные точки с двумя действительными и взаимно обратными собственными значениями называются *гиперболическими*.

Гиперболичность

Гиперболичность — свойство неподвижной точки быть гиперболической — специфическое свойство не менее чем двумерных дискретных отображений, принадлежит к числу наследственных свойств. Убедимся в этом.

Так как $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, собственные значения действительны и различны, поэтому матрица T (2.18) приводится к диагональному виду, т. е. существует невырожденная ($\det S \neq 0$) матрица S , такая, что

$$S^{-1}TS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad (2.24)$$

$$T = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (2.25)$$

Итерация «кошки Арнольда» определяется матрицей T^n , где n номер итерации.

$$T^n = \left[S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1} \right] = \left[S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1} \right] \times \\ \times \left[S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1} \right] \dots \left[S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1} \right].$$

Лекция 2. Квадратичное отображение

Раскрывая квадратные скобки и используя то, что $S^{-1}S = E$ (единичная матрица), получаем:

$$T^n = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} S, \quad (2.26)$$

т. е. n -я итерация «кошки Арнольда» имеет собственные значения λ_1^n и λ_2^n , а поскольку $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, то $\lambda_1^n \cdot \lambda_2^n = (\lambda_1 \lambda_2)^n = 1$, гиперболическая неподвижная точка исходного отображения остается гиперболической неподвижной точкой и в n -й итерации, или гиперболичность — наследственное свойство.

Как и одномерные дискретные отображения, порождающие сложное, хаотическое, поведение точек, например треугольное отображение и сдвиги Бернулли, «кошка Арнольда» представляет собой суперпозицию (произведение, или результат последовательного выполнения) двух операций: растяжения, задаваемого матрицей T (2.18), и перекладывания фрагментов.

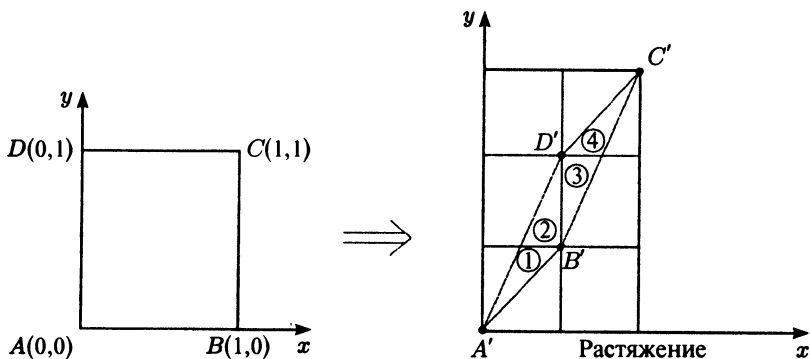


Рис. 14. Растяжение, порождаемое «кошкой Арнольда»

Проследим, во что переходит под действием растяжения T единичный квадрат (рис. 14):

$$A(0, 0) \Rightarrow A'(0, 0); \quad (2.27)$$

$$B(1, 0) \Rightarrow B'(1, 1); \quad (2.28)$$

$$C(1, 1) \Rightarrow C'(2, 3); \quad (2.29)$$

$$D(0, 1) \Rightarrow D'(1, 2). \quad (2.30)$$

Так как растяжение под действием матрицы T — линейное преобразование, оно переводит прямые в прямые. Установив образы вершин квадрата, мы тем самым устанавливаем образы сторон квадрата, который в целом переходит в параллелограмм $A'B'C'D'$. Вторая часть преобразования «кошка Арнольда» — $(\text{mod } 1)$ — взятие дробной части; оно соответствует разрезанию параллелограмма $A'B'C'D'$ на треугольники с номерами 1, 2, 3 и 4 с последующим перекладыванием их в исходный единичный квадрат (рис. 15).

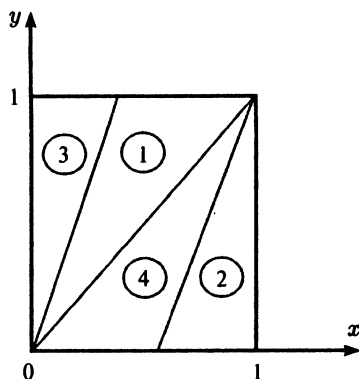


Рис. 15. Параллелограмм на рис. 14 разрезан на четыре треугольника, которые уложены в единичный квадрат

Неподвижные точки отображения «кошка Арнольда»

$$\begin{aligned} x + y &= x \\ x + 2y &= y \end{aligned} \pmod{1}$$

Лекция 2. Квадратичное отображение

$(x = 0, y = 0)$ — неподвижная точка, других неподвижных точек нет.

Вторая итерация

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} &= 3x_n + 5y_n \end{aligned} \pmod{1}, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= x, & x + 3y &= 0 \\ 3x + 5y &= y, & 3x + 4y &= 0 \end{aligned} \pmod{1}, \quad (2.33)$$

$$5x = 0; \quad x = \frac{N}{5}, \quad (2.34)$$

где N — целое число.

$$x = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}. \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 0 \\ 3x + 4y &= 0 \end{aligned} \pmod{1}, \quad (2.36)$$

↓

$$\begin{aligned} 3x + 9y &= 0 \\ 3x + 4y &= 0 \end{aligned} \pmod{1},$$

↓

$$5y = 0; \quad y = \frac{M}{5}. \quad (2.37)$$

$$y = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}.$$

$$\left(x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{5}\right)$$

$$2x + 3y = x, \quad \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \neq \frac{1}{5}. \quad (2.38)$$

$$\left(x = \frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}\right)$$

$$2x + 3y = x, \quad \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} \neq \frac{1}{5}. \quad (2.39)$$

$$\left(x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{5}\right)$$

(2.40)

$$\frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \pmod{1},$$

$$\frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$(x = 1/5, y = 3/5)$ — неподвижная точка второй итерации «кошки Арнольда».

Опуская некоторых кандидатов в неподвижные точки, не прошедших проверку, приведем только найденные неподвижные точки:

$$\left(x = \frac{3}{5}, y = \frac{4}{5}\right) \text{ — неподвижная точка,}$$

$$2 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \pmod{1}. \quad (2.41)$$

$$\left(x = \frac{4}{5}, y = \frac{2}{5} \right)$$

$$2 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \pmod{1}. \quad (2.42)$$

Таким образом, помимо унаследованной неподвижной точки $(x = 0, y = 0)$ вторая итерация «кошки Арнольда» приобретает три дополнительные неподвижные точки:

$$P_1 \left(x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{5} \right),$$

$$P_2 \left(x = \frac{3}{5}, y = \frac{4}{5} \right), \quad (2.43)$$

$$P_3 \left(x = \frac{4}{5}, y = \frac{2}{5} \right).$$

Нетрудно видеть, что их координаты удовлетворяют уравнениям для неподвижных точек второй итерации «кошки Арнольда»:

$$P_1: \quad 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}; \quad \frac{11}{5} \equiv \frac{1}{5} \pmod{1} \quad (2.44)$$

$$3 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}; \quad \frac{18}{5} \equiv \frac{3}{5} \pmod{1} \quad (2.45)$$

$$P_2: \quad 2 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}; \quad \frac{18}{5} \equiv \frac{3}{5} \pmod{1} \quad (2.46)$$

$$3 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}; \quad \frac{29}{5} \equiv \frac{4}{5} \pmod{1} \quad (2.47)$$

$$P_3: \quad 2 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}; \quad \frac{14}{5} \equiv \frac{4}{5} \pmod{1} \quad (2.48)$$

$$3 \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}; \quad \frac{12}{5} \equiv \frac{2}{5} \pmod{1}. \quad (2.49)$$

Топологически сопряженные отображения

Интуитивно ясно, что «скаты» треугольного отображения, непрерывно деформируя, можно превратить в дуги параболы и наоборот. Можно показать, что аналитически такую деформацию выполняет преобразование

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin(1 - 2x). \quad (2.50)$$

Оно переводит квадратичное отображение

$$y = 4x(1 - x) \quad (2.51)$$

в треугольное

$$y = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1 - x) & \text{при } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.52)$$

С параболическим отображением связаны и многие другие любопытные особенности. Например, значение

$$R_1 = \sqrt{5} + 1 = 2\varphi,$$

где φ — знаменитое золотое сечение.

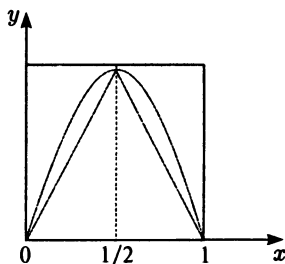


Рис. 16. Преобразование квадратичного отображения в треугольное

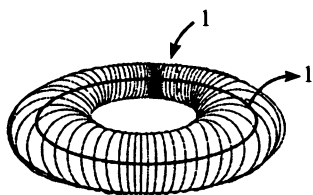


Рис. 17. Тор

Геометрически условие $(\text{mod } 1)$ (переход к дробной части) означает, что значения x и y не могут быть больше единицы, т. е. координаты точек, вычисляемых по формулам (2.16), соответствуют точкам, лежащим на поверхности тора с экватором и меридианами единичной длины (рис. 17).

Таким образом, действие всех рассмотренных выше дискретных преобразований — треугольного, сдвигов Бернулли и «кошки Арнольда» — разворачивается на поверхности тора с единичным меридианом и единичной параллелью, или, что то же, на единичном квадрате с отождествленными противоположными сторонами (развертка тора) (рис. 18).

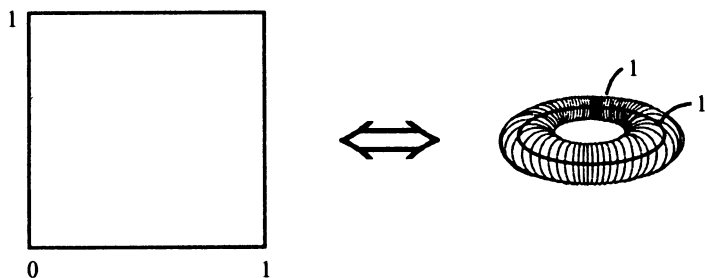


Рис. 18. Тор

Вопросы и упражнения к лекции 2

1. Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек пересечения параболы $y = 4x(1 - x)$ с прямой $y = 1/2$.

Доказать, что x_1 и x_2 — точки экстремума второй итерации квадратичного отображения $y = 4x(1 - x)$.

2. Доказать, что площадь, заключенная под графиком n -й итерации треугольного отображения, не зависит от номера итерации n .
3. Доказать, что

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin(1 - 2x)$$

переводит квадратичное отображение $y = 4x(1 - x)$ в треугольное

$$y = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1 - x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Лекция 3

Непрерывные системы

Описывать эволюцию динамической системы во времени можно различными способами, акцентируя внимание на различных аспектах. Если наибольший интерес вызывает конфигурация системы, ее положение в пространстве или состав, то удобно воспользоваться так называемым конфигурационным пространством, каждая точка которого описывает, как говорит его название, какую-то конфигурацию системы. Но для описания эволюции системы во времени, информации, содержащейся в конфигурационном пространстве, недостаточно: состояние системы, описываемой, например, уравнениями Ньютона (т. е. дифференциальными уравнениями 2-го порядка), определяется не только положением системы $\mathbf{x}(t)$, но и скоростью $\dot{\mathbf{x}}(t)$; если же система гамильтонова, то ее состояние определяется набором обобщенных координат (q_1, \dots, q_n) , где n — число степеней свободы динамической системы, и набором сопряженных с обобщенными координатами обобщенных скоростей p_1, \dots, p_n . Пространство, каждая точка которого соответствует состоянию динамической системы, называется ее фазовым пространством. Решением служит кривая, образованная точками $\mathbf{x}(t)$ при описании уравнениями Ньютона или точками $\mathbf{q}(t)$ — в случае гамильтоновых систем. Такая кривая, называ-

емая также траекторией, или орбитой, в каждой точке $\{q_i(t)\}$ касается вектора скорости $\{p_i(t)\}$. Совокупность всех траекторий называется фазовым портретом системы. Фазовое пространство представляет собой конфигурационное пространство, на которое наложено поле скоростей: в точке $\{q_i(t)\}$ (или $\{x_i(t)\}$ — в ньютоновском случае) приложен вектор скорости $\{p_i\}$, в ньютоновском случае — $\{\dot{x}_i\}$. Траектории можно рассматривать как линии тока гипотетической фазовой жидкости. Если \mathbf{v} — векторное поле скоростей динамической системы, то фазовая жидкость при $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ называется несжимаемой, а при $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$ — сжимаемой. В случае любой гамильтоновой системы фазовая жидкость несжимаема. Действительно, эволюция гамильтоновой системы во времени определяется уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (3.1)$$

где H — функция Гамильтона, или гамильтониан, q_i — обобщенные координаты, p_i — сопряженные с ними обобщенные скорости. Преобразования, сохраняющие вид гамильтоновых уравнений, т. е. переводящие одну гамильтонову систему в другую, называются каноническими и образуют симплектическую группу. Покажем, что для любой гамильтоновой системы

$$\operatorname{div}(\dot{q}, \dot{p}) = 0. \quad (3.2)$$

Действительно,

$$\operatorname{div}(\dot{q}, \dot{p}) = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_s}{\partial p_s} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_s} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) доказывает теорему Лиувилля: фазовая жидкость гамильтоновой системы несжимаема; объем фазовой жидкости со временем не изменяется, изменяется только форма.

Иначе ведет себя система Лоренца (названная в честь автора американского метеоролога Эдварда Лоренца — не путать с голландским физиком Хендриком Антоном Лоренцем):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -xz + rz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{3.4}$$

где $b, r, \sigma > 0$.

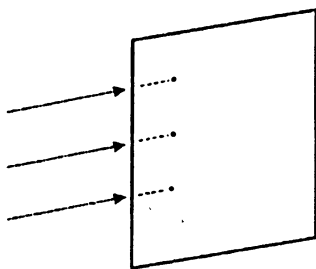
Имеем:

$$\operatorname{div}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\sigma - 1 - b < 0.\tag{3.5}$$

Следовательно, в случае системы Лоренца (3.4) объем фазовой жидкости сжимается, система диссипативна.

Сечение Пуанкаре

Фазовое пространство, как правило, многомерно, что создает определенные трудности при попытке наглядно представить себе фазовый портрет системы.



Пуанкаре предложил удобный прием, позволяющий сводить изучение геометрии траекторий в многомерном фазовом пространстве к изучению их пересечения с двумерным трансверсальным (т. е. «поперечным» фазовому потоку, не касательным, не тангенциальным) сечением (рис. 19).

Рис. 19. Сечение Пуанкаре

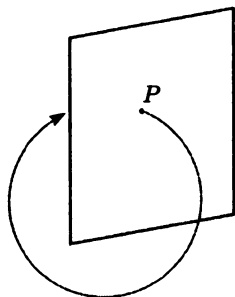


Рис. 20. Неподвижная точка в сечении Пуанкаре соответствует изолированной замкнутой траектории в фазовом пространстве

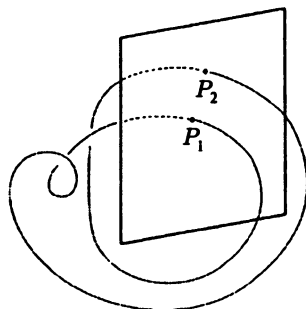


Рис. 21. 2-циклу (P_1, P_2) в сечении Пуанкаре соответствует двузахватная замкнутая траектория в фазовом пространстве

Нетрудно видеть, что неподвижной точке в сечении Пуанкаре соответствует изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве (рис. 20), k -циклу в сечении Пуанкаре — замкнутая траектория с k -витками в фазовом пространстве (рис. 21), пересекающими плоскость сечения, линии в сечении Пуанкаре — поверхность, заполненная траекториями в фазовом пространстве, а облаку точек — хаотическое поведение траекторий в фазовом пространстве.

Пуанкаре установил связь между векторными полями на многообразиях и топологией многообразий — носителей векторных полей. В частности, он ввел важное понятие индекса Пуанкаре.

Индекс Пуанкаре

Представим себе многообразие (фазовое пространство какой-то динамической системы), в каждой точке которого за-

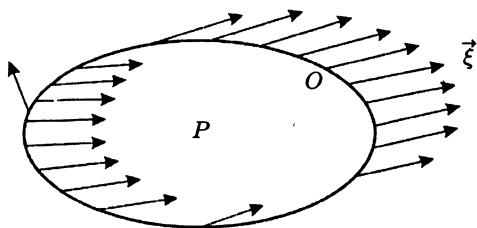


Рис. 22. При возвращении в исходную точку O после обхода замкнутого контура C вектор ξ совпадает с самим собой

дан единичный вектор. Выберем на многообразии точку P и опишем вокруг нее замкнутый контур C (без самопересечений) (рис. 22).

Так как все точки контура принадлежат многообразию, в каждой точке контура C имеется единичный вектор. Так как векторное поле непрерывно, векторы в близких точках мало отличаются по направлению. Выбрав любую точку контура C , например точку O , за исходную, обойдем контур по или против часовой стрелки. По возвращении в исходную точку O вектор поля, как бы он ни колебался или вращался при обходе контура, совместится с вектором ξ .

Следовательно, полный угол поворота g при обходе простого замкнутого контура C кратен углу 2π :

$$\gamma = 2\pi \cdot k, \quad (3.6)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, — целое число. Число k — количество полных оборотов вектора поля скоростей при обходе вокруг точки P по простому (гомеоморфному окружности, т. е. переходящему в окружность при непрерывной деформации) замкнутому контуру C — называется *индексом Пуанкаре* точки P . Можно показать, что индекс Пуанкаре не зависит от выбора начальной точки O и направления обхода.

Если $k = 0$, то точка P — не особая, векторное поле не обращается в ней в нуль.

Отличие индекса Пуанкаре от нуля — отличительный признак особой точки: у седла — $k = -1$ (вектор скорости совершает один оборот за обход в направлении, противоположном направлению обхода), у центра и фокуса — $k = +1$ (вектор скорости совершает один оборот в направлении, совпадающем с направлением обхода).

Если многообразие имеет χ отверстий, то его эйлерова характеристика равна

$$2 - 2\chi. \quad (3.7)$$

Пуанкаре доказал, что для векторного поля на многообразии с эйлеровой характеристикой (3.7) сумма индексов Пуанкаре по всем особым точкам равна:

$$\sum_{\substack{\text{особые} \\ \text{точки}}} (\text{индексы Пуанкаре}) = 2 - 2\chi. \quad (3.8)$$

Остов фазового портрета

Поточечное построение фазового портрета нелинейной динамической системы — дело достаточно трудоемкое и кропотливое. К счастью, многие трудности можно обойти, если ограничиться построением так называемого *остова фазового портрета* — совокупности наиболее важных («несущих») его деталей — особых точек (точек остановки, или обращения в нуль) векторного поля, сепаратрис, отделяющих качественно различные типы траекторий, границы областей притяжения (рис. 23): P — особые точки гиперболического типа (седла); Q — особые точки-центры; сепаратриса отделяет периодические колебания (замкнутые траектории вокруг центров Q внутри сепаратрисных петель) от гиперболических колебаний (кривые вне сепаратрис).

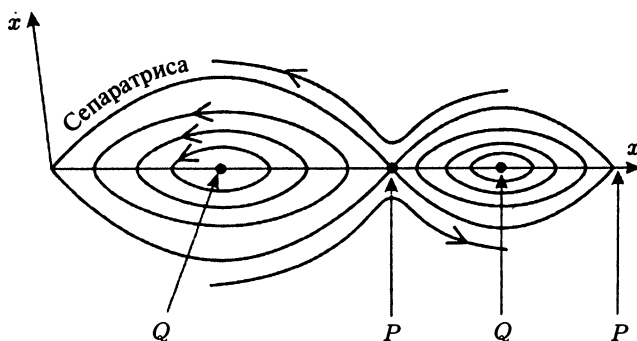


Рис. 23. Фрагмент фазового портрета осциллятора

Разнообразие поведения траекторий на плоскости ограничено теоремой Бендиксона—Пуанкаре, согласно которой траектория может уйти на бесконечность, «уткнуться» в особую точку или «намотаться» на предельный цикл (замкнутую изолированную траекторию). Не случайно выдающийся специалист по теории колебаний А. А. Андронов в поисках новых типов поведения траекторий провозгласил лозунг: «Выйти из плоскости!». Осуществить призыв А. А. Андропова оказалось непросто.

Система Э. Лоренца

Первым по-настоящему выйти из плоскости удалось американскому метеорологу Эдварду Лоренцу в конце 1970-х гг.

Рассматривая тепловую конвекцию в подогреваемом снизу горизонтальном слое вязкой жидкости, Э. Лоренц получил из уравнений Буссинеска систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= r x - y - x z, \\ \dot{z} &= -b z + x y, \end{aligned} \quad (3.9)$$

σ , r и b — положительные константы (их физический смысл: r — число Рэлея, нормированное на критическое значение $Ra/Ra_{\text{крит}} \sim \text{grad } T$, b — геометрический параметр), σ — число Прандтля — безразмерный критерий подобия тепловых процессов в жидкостях и газах;

$$\sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda},$$

где μ — коэффициент динамической вязкости, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, λ — коэффициент теплопроводности;

$$r > 24,74, \quad \sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3}. \quad (3.10)$$

Явления, обнаруженные Э. Лоренцем при исследовании системы (3.9) численными методами со значениями параметров (3.10), соответствуют явлениям, которые экспериментально наблюдал в начале XX в. французский физик Бенар, подогревая снизу прозрачную кювету с вязкой жидкостью (спермацетовым маслом): при небольшой разнице температур между свободной поверхностью жидкости и дном кюветы перенос тепла осуществлялся за счет теплопроводности, и слой жидкости оставался однородным и прозрачным; по миновании критической величины разности температур перенос тепла осуществлялся с помощью конвекции: в жидкости возникали конвективные валы, вращавшиеся как шестерни в зацеплении навстречу друг другу. При дальнейшем увеличении разности температур валы начинали изгибаться, на их поверхности возникала «гофрировка», а затем движение жидкости приобретало хаотический характер.

Исследуя систему (3.9) численными методами при

$$r = 28, \quad b = \frac{8}{3}, \quad \sigma \in [1, 10], \quad (3.11)$$

Лоренц обнаружил новый тип поведения траекторий, притягивающихся в фазовом пространстве к некоторому образованию, не имеющему аналогов на плоскости и получившему название «аттрактор Лоренца».

Свойства системы Лоренца

1. *Однородность* (отсутствие свободных членов), откуда следует, что

$$O = (x = 0, y = 0, z = 0)$$

— неподвижная (особая) точка. Существование точки O обусловлено однородностью системы Лоренца и не зависит от значений параметров b, r, σ .

2. *Симметрия*. Система Лоренца переходит в себя (остается инвариантной) под действием преобразования

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z). \quad (3.12)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (-\dot{x}) &= -\sigma(-x) + \sigma(-y) \\ (-\dot{y}) &= r(-x) - (-y) - (-xz) \Rightarrow \\ (\dot{z}) &= -b(z) + (-x)(-y) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \Rightarrow \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3. *Диссипативность.*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(-\sigma x + \sigma y) + \frac{\partial}{\partial y}(rx - y - xz) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(-bz + xy) = -\sigma - 1 - b < 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Фазовый поток системы Лоренца сжимается.

4. *Ограниченность траекторий.* Войдя в сферу, траектории системы Лоренца остаются в ограниченной части фазового пространства.

Выясним, во что переходят под действием системы Лоренца точки, лежащие на поверхности сферы.

Пусть

$$V = x^2 + y^2 + [z - (\sigma + r)]^2 = K^2(\sigma + r)^2 \quad (3.16)$$

— сфера радиуса $K(\sigma + r)$ с центром в точке $(0, 0, \sigma + r)$. Радиус сферы не зависит от времени t . Продифференцируем обе части уравнения сферы (3.16) по t :

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} + [z - (\sigma y + r)]\dot{z} = 0, \quad (3.17)$$

где $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — левые части системы Лоренца (3.9). Подставляя вместо $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ правые части соответствующих уравнений системы Лоренца, получаем

$$\begin{aligned} 2x(-\sigma x + \sigma y) + 2y(rx - y - xz) + \\ + 2[z - (\sigma + r)](-bz + xy) = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Покажем, что смешанных членов в левой части уравнения (3.18) нет. Для этого вычислим коэффициенты:

— при xuz :

$$-2 + 2 = 0; \quad (3.19)$$

— при xy :

$$2\sigma + 2r - 2(\sigma + r) = 0. \quad (3.20)$$

Члены xz , yz отсутствуют.

Следовательно, в левую часть уравнения (3.18) входят только квадраты и первые степени переменных x , y и z :

$$-2\sigma x^2 - 2y^2 - 2b \left[z - \frac{\sigma + r}{2} \right]^2 + b \frac{(\sigma + r)^2}{2} = 0. \quad (3.21)$$

Это — уравнение эллипсоида с центром в точке $(0, 0, (\sigma + r)/2)$.

Вычислим длины полуосей эллипсоида:

— по оси x :

$$\frac{b(\sigma + r)^2}{2 \cdot 2\sigma} = \frac{(\sigma + r)^2}{4\sigma/b}; \quad (3.22)$$

— по оси y :

$$\frac{b(\sigma + r)^2}{2 \cdot 2} = \frac{(\sigma + r)^2}{4/b}. \quad (3.23)$$

Мы видим, что при

$$K^2 = \frac{1}{4} + \frac{b}{4} \left(\max \left(\frac{1}{\sigma}, 1 \right) \right) \quad (3.24)$$

эллипсоид остается внутри исходной сферы (3.16).

Следовательно, траектории, входящие в сферу (3.16), при всех t остаются внутри нее, т. е. ограниченными.

Неподвижные точки системы Лоренца

По определению, неподвижной называется точка, которая под действием системы переходит в себя. Система Лоренца состоит из 3 уравнений, разрешенных относительно \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , т. е. относительно скоростей изменения величин x , y и z во времени. Для того чтобы точка (x, y, z) была неподвижной, вектор скорости $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ в ней должен быть равен нулю.

Приравнивая нулю правые части системы Лоренца, получаем уравнения

$$-\sigma x + \sigma y = 0, \quad (3.25)$$

$$rx - y - xz = 0, \quad (3.26)$$

$$-bz + xy = 0. \quad (3.27)$$

Так как система (3.25)–(3.27) однородна, точка $O(0, 0, 0)$ — ее неподвижная точка при любых значениях параметров. (Экспериментально проще всего изменять параметр r , варьируя разность температур между дном подогреваемой снизу кюветы и свободной поверхностью вязкой жидкости.)

Пусть теперь $x \neq 0$ (в противном случае из (3.25) мы получаем, что $y = 0$, а из (3.27) — что $z = 0$, т. е. возвращаемся к уже известной неподвижной точке O). Тогда из (3.26) получаем:

$$r - 1 - z = 0, \quad (3.28)$$

или

$$z = r - 1, \quad (3.29)$$

а из (3.27) — что

$$x^2 = bz, \quad (3.30)$$

или

$$x = \sqrt{bz} = \sqrt{b(r-1)}. \quad (3.31)$$

Таким образом, помимо точки O существует еще одна неподвижная точка O_1 :

$$O_1 = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right). \quad (3.32)$$

Так как система Лоренца инвариантна относительно преобразования (3.12), у точки O_1 имеется парная ей неподвижная точка O_2 :

$$O_2 = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, 1-r \right). \quad (3.33)$$

Устойчивость по Ляпунову

Термин «устойчивость» (так же как и термин «неустойчивость») в различных работах используется в различных смыслах и поэтому требует пояснения.

А. М. Ляпунов предложил следующее определение устойчивости. Если начальные точки x_0 и z_0 ε -близки в начальный момент времени:

$$|x_0 - z_0| < \varepsilon, \quad (3.34)$$

то они остаются δ -близкими (где δ зависит от ε) при любом $t > t_0$:

$$|x(t) - z(t)| < \delta(\varepsilon). \quad (3.35)$$

Иначе говоря, если точка z_0 принадлежит при $t = t_0$ ε -окрестности точки x_0 , то при любом $t > t_0$ траектория $z(t)$, выходящая из точки z_0 отклоняется от траектории $x(t)$, выходящей из точки x_0 , меньше, чем на δ , величина δ зависит от ε , т. е. траектория $z(t)$ проходит внутри трубки диаметром $\delta(\varepsilon)$, построенной вокруг траектории $x(t)$ как вокруг оси (рис. 24). Устойчивость по Ляпунову соответствует интуитивному представлению о том, что устойчивая система слабо (или по крайней

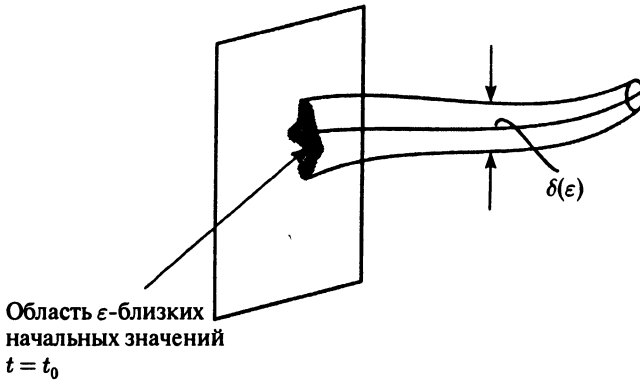


Рис. 24. Устойчивость по Ляпунову: траектории, выходящие из ϵ -близких значений остаются $\delta(\epsilon)$ -близкими при всех последующих $t > t_0$

мере ограничено) реагирует на малое возмущение. В отличие от устойчивых систем, у неустойчивой системы малое начальное возмущение неограниченно возрастает: какое бы число δ мы ни выбрали, рано или поздно наступит такой момент $t^* > t_0$, что

$$|\mathbf{x}(t^*) - \mathbf{z}(t^*)| > \delta, \quad (3.36)$$

т. е. траектория $\mathbf{z}(t)$, выходящая из точки \mathbf{z}_0 такой, что выполняется неравенство (3.34), отклонится от траектории $\mathbf{x}(t)$, выходящей из начальной точки $\mathbf{x}_0(t)$ больше, чем на δ .

Установить устойчивость по Ляпунову неподвижной точки, периодического движения и других интересных по тем или другим соображениям режимов нелинейной системы можно, разлагая решение в окрестности выбранного режима в ряд и удерживая только линейные члены. Поэтому устойчивость по Ляпунову иногда называют устойчивостью в линейном приближении (или по линейному приближению).

Выясним устойчивость по Ляпунову неподвижных точек системы Лоренца.

Выпишем для этого линейную часть системы Лоренца. Ее матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} & \frac{\partial m_1}{\partial z} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} & \frac{\partial m_2}{\partial z} \\ \frac{\partial m_3}{\partial x} & \frac{\partial m_3}{\partial y} & \frac{\partial m_3}{\partial z} \end{array} \right) \Bigg|_{O = (0, 0, 0)}, \quad (3.37)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{x} &= m_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= m_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= m_3(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.38)$$

— система Лоренца (3.4).

Матрица (3.37) имеет следующий вид:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Следовательно, линейная часть системы Лоренца в окрестности неподвижной точки $O = (0, 0, 0)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y, \\ \dot{z} &= -bz. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Находим собственные значения матрицы (3.39):

$$\det(M - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \sigma - \lambda & -\sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (3.41)$$

или

$$(b + \lambda)[(\sigma - \lambda) \cdot (1 + \lambda)] = 0, \quad (3.42)$$

$$\lambda_1 = -b; \quad \lambda_2 = \sigma; \quad \lambda_3 = -1. \quad (3.43)$$

Таким образом, в неподвижной точке $O = (0, 0, 0)$ существуют два устойчивых собственных направления, по которым траектории входят в точку O , они отвечают собственным значениям $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_3 < 0$, и одно собственное направление, по которому траектории выходят из точки O . Оно отвечает $\lambda_2 = \sigma > 0$.

Из формул (3.32) и (3.33) видно, что при $r < 1$ координаты неподвижных точек O_1 и O_2 мнимые. Вещественными они становятся только при $r \geq 1$. Устойчивость точек O_1 и O_2 по Ляпунову находится так же, как выше мы анализировали устойчивость неподвижной точки $O = (0, 0, 0)$. Необходимо вычислить линейную часть системы Лоренца (3.4) в окрестности каждой из точек O_1 и O_2 и найти собственные значения. Отрицательные собственные значения соответствуют устойчивым собственным направлениям, положительные — неустойчивым.

При $1 < r < r_1 = 13,92$ система Лоренца наряду с неподвижной точкой O имеет еще две неподвижные точки (состояния равновесия) O_1 и O_2 . Состояние O — седло, имеющее двумерное устойчивое многообразие S , «натянутое» на собственные направления, отвечающие отрицательным собственным значениям $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_3 < 0$, и две неустойчивые сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 , стремящиеся к состояниям равновесия O_1 и O_2 (рис. 25 б).

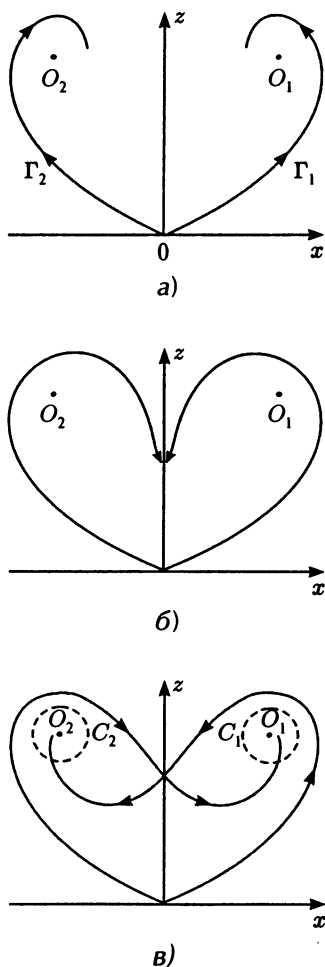


Рис. 25. Поведение траекторий в системе Лоренца: а) при $1 < r < r_1$; б) при $r = r_1$; в) при $r_1 < r < r_2$

При $r = r_1$ каждая из сепаратрис становится двоякоасимптотической к седлу O . При переходе через r_1 из замкнутых петель сепаратрис рождаются неустойчивые периодические движения — предельные циклы C_1 и C_2 . Вместе с предельными циклами рождается и сложно организованное предельное множество, которое, однако, еще не является притягивающим (аттрактором), и при

$$r_1 < r < r_2 = 24,06$$

траектории по-прежнему стремятся к O_1 и O_2 . Но ситуация на рис. 25 в отличается от ситуации на предыдущих рисунках, так как сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 идут не к «своим» неподвижным точкам O_1 и O_2 , а при $r = r_2$ наматываются на предельные циклы C_1 и C_2 .

При $r_2 < r < r^* = 24,74$ в системе Лоренца наряду с устойчивыми состояниями равновесия O_1 и O_2 существует еще и притягивающее предельное множество со сложным поведением траекторий — аттрактор Лоренца.

При $r \rightarrow r^*$ предельные циклы C_1 и C_2 стягиваются к неподвижным точкам O_1 и O_2 которые при

$r = r^*$ теряют устойчивость. При $r > r^*$ аттрактор Лоренца остается единственным притягивающим множеством системы Лоренца.

Аттрактор Лоренца — не многообразие, он обладает сложной (фрактальной) структурой.

О степени его изрезанности можно судить по количественным мерам стохастичности, которые мы рассмотрим в дальнейшем.

Вопросы и упражнения к лекции 3

1. У динамической системы на плоскости все особые точки простые. В конечной части плоскости располагаются седло, фокус и узел.
Может ли бесконечно удаленная точка такой динамической системы быть неособой?
2. Доказать, что при $r < 1$ точка $O(0, 0, 0)$ — единственная неподвижная точка системы Лоренца.
3. Выяснить характер устойчивости точки O в зависимости от значения параметра r .
4. Доказать, что при $r > 1$ у системы Лоренца существуют помимо точки O еще две дополнительные особые точки O_1 и O_2 .
5. Выяснить характер устойчивости неподвижных точек O_1 и O_2 .

Лекция 4

Еще один взгляд на систему Э. Лоренца

Открытие Э. Лоренца произвело впечатление разорвавшейся бомбы: столь сложного поведения от простой, на первый взгляд, системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичными нелинейностями не ожидал никто.

Учитывая важность совершенного Э. Лоренцем открытия, проследим за эволюцией поведения траекторий в системе Лоренца еще раз, с тем чтобы, не вдаваясь в детали, составить представление о всей картине в целом. Для удобства изложения запишем систему Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}\tag{4.1}$$

в виде

$$\dot{X} = F(X).\tag{4.2}$$

Переменные и коэффициенты в системе Лоренца (4.1) имеют следующий физический смысл: переменная x пропорциональна скорости циркулирующей жидкости; переменная y

характеризует разность температур между восходящими и нисходящими потоками жидкости, переменная z пропорциональна отклонению вертикального профиля температур от равновесного значения; σ — число Прандтля — безразмерный критерий подобия тепловых режимов; r — управляющий параметр, пропорциональный разности температур между дном подогреваемой снизу жидкости и ее свободной поверхностью — число Рэлея Ra , нормированное на свое критическое значение; b — безразмерный параметр, характеризующий линейные размеры системы.

Особые точки (точки остановки $\dot{X} = 0$) имеют координаты, удовлетворяющие уравнениям

$$F(X) = 0. \quad (4.3)$$

Так как при любых значениях параметров, в том числе и при любом значении управляющего параметра r ,

$$F(0) = 0, \quad (4.4)$$

мы заключаем, что $O = (0, 0, 0)$ — особая точка системы (4.1). Передача тепла в точке O осуществляется с помощью теплопроводности, а жидкость неподвижна. Выясним, устойчива ли точка O по Ляпунову. Для этого вычислим матрицу

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_O = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \Big|_O. \quad (4.5)$$

Вычислим собственные значения матрицы (4.5), для чего решим характеристическое уравнение

$$\det \left(\left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_O - \lambda E \right) = 0,$$

или

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (4.6)$$

Блочная структура матриц (4.5) и (4.6) позволяет упростить решение кубического характеристического уравнения, выделив линейный множитель $(b + \lambda)$ и квадратичный множитель в квадратных скобках. Корни характеристического уравнения:

$$P(\lambda) \equiv -(b + \lambda)[(\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - \sigma] = 0; \quad (4.7)$$

$$\lambda_1 = -b; \quad (4.8)$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{\sigma + 1}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4(r - 1)\sigma}}{2}. \quad (4.9)$$

Следовательно, состояние $O = (0, 0, 0)$ устойчиво по Ляпунову (аттрактор), так как при $0 < r < 1$ все три собственных числа в точке O отрицательны (см. рис. 26):

$$\lambda_1 < 0; \quad \lambda_{2,3} < 0. \quad (4.10)$$

При $r = 1$

$$\lambda_2 = -\frac{\sigma + 1}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4(r - 1)\sigma}}{2}; \quad (4.11)$$

λ_2 обращается в нуль (см. рис. 27):

$$\lambda_2 = -\frac{\sigma + 1}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma + 1)^2}}{2} = 0, \quad (4.12)$$

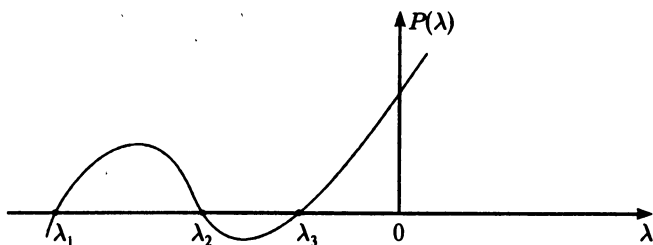


Рис. 26. Характеристический многочлен $P(\lambda)$ при $0 < r < 1$. Точка O

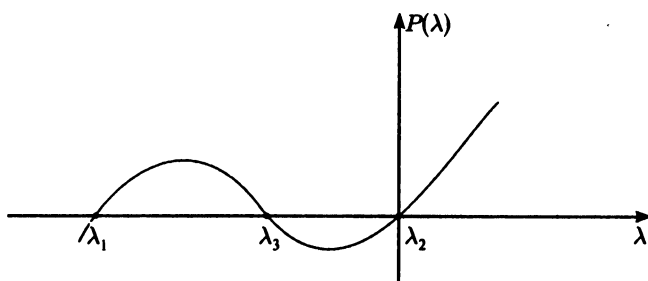


Рис. 27. Характеристический многочлен $P(\lambda)$ при $r = 1$. Точка O

а

$$\lambda_3 = -\frac{\sigma + 1}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4(r - 1)\sigma}}{2} - b - (\sigma + 1); \quad (4.13)$$

$$\lambda_3 = -\frac{\sigma + 1}{2} - \frac{\sigma + 1}{2} = -(\sigma + 1). \quad (4.14)$$

Обращение λ_2 в 0 означает, что состояние O при $r = 1$ находится «на грани устойчивости»: теплопроводность уступает место конвекции Бенара (в однородной при $r > 1$ жидкости возникают конвективные валы). В лекции 3 было показано,

что помимо единственной неподвижной точки $O = (0, 0, 0)$ при $r < 1$ — устойчивого узла — в системе Лоренца при $r > 1$ возникают еще две неподвижные точки

$$O_{2,3} = \left(\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \quad (4.15)$$

(при $r < 1$ их координаты x и y были мнимыми). Подставив координаты точек $O_{2,3}$, соответствующих вращающимся в противоположные стороны конвективным валам, в матрицу линейного приближения (4.5), определим устойчивость состояний $O_{2,3}$ по Ляпунову:

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & c \\ c & c & -b - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (4.16)$$

$$c = \pm \sqrt{b(r-1)},$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0 \quad (4.17)$$

(см. рис. 28).

При $r = r_c$ два собственных значения становятся чисто мнимыми (см. рис. 29):

$$\lambda = \pm i\lambda_0, \quad (4.18)$$

вокруг точек $O_{2,3}$ возникают предельные циклы. Подставляя (4.18) в (4.17), находим:

$$r_c = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}. \quad (4.19)$$

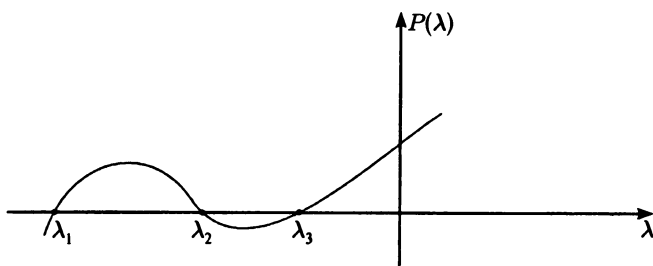


Рис. 28. Характеристический многочлен $P(\lambda)$ при $1 < r < r_c$. Точки $O_{2,3}$

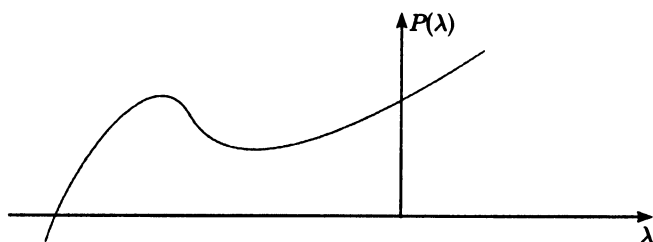


Рис. 29. Характеристический многочлен $P(\lambda)$ при $r > r_c$. Точки $O_{2,3}$

При значениях параметров

$$\sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3},$$

использованных Лоренцем в его численных расчетах

$$r_c = 24,7368. \quad (4.20)$$

Конвективные валы (неподвижные точки $O_{2,3}$) существуют при $r > 1$, но устойчивы только при

$$1 < r < r_c. \quad (4.21)$$

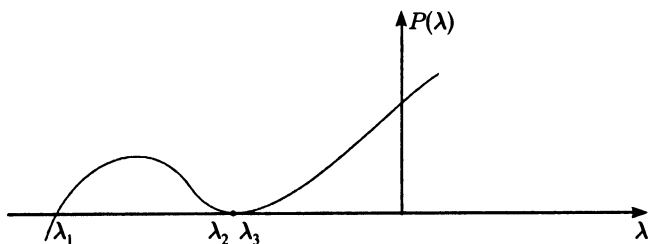


Рис. 30. Характеристический многочлен $P(\lambda)$ при $r = r_c$. Точки $O_{2,3}$

При $r = r_c$ предельные циклы стягиваются в точки, а при $r > r_c$ становятся неустойчивыми: на конвективных валах появляются извивы, гофры и наступает хаос (см. рис. 30).

Так как фазовый объем в системе Лоренца сжимается (система диссипативна), объем предельного аттрактора равен нулю. Аттрактор Лоренца имеет сложную структуру, которая была по достоинству оценена позже — после появления количественных мер сложности хаотических структур и режимов.

Качественные признаки хаоса

Периодическая зависимость от времени угла отклонения математического маятника от вертикали, подталкиваемого периодической силой $F \cos \omega t$, сменяется сложной хаотической зависимостью, когда амплитуда силы превосходит некоторое критическое значение $F > F_c$ (рис. 31).

В эксперименте Бенара вертикальная составляющая скорости потока жидкости $x(t)$ изменялась в зависимости от частоты ω довольно причудливым (хаотическим) образом. Спектр мощности величины $x(t)$ — квадрат Фурье-образа сигнала $x(t)$ — имеет при низких частотах ω характерную широкую

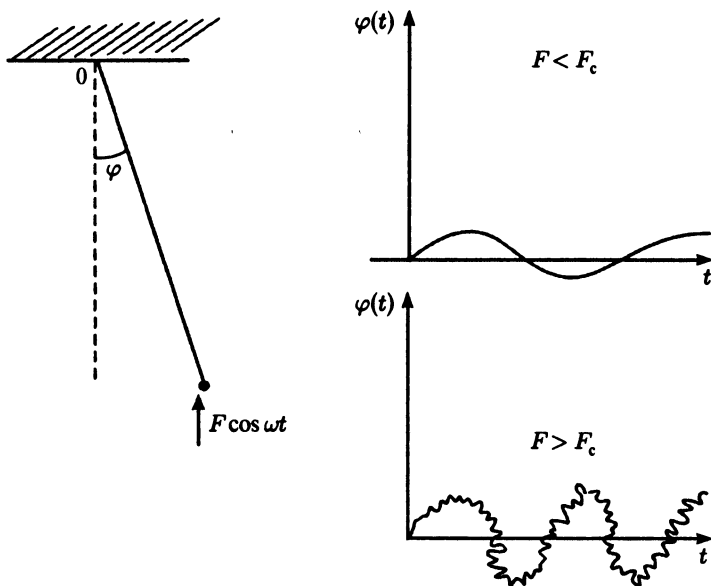


Рис. 31. Временная зависимость угла отклонения $\varphi(t)$ от вертикали периодически подталкиваемого маятника

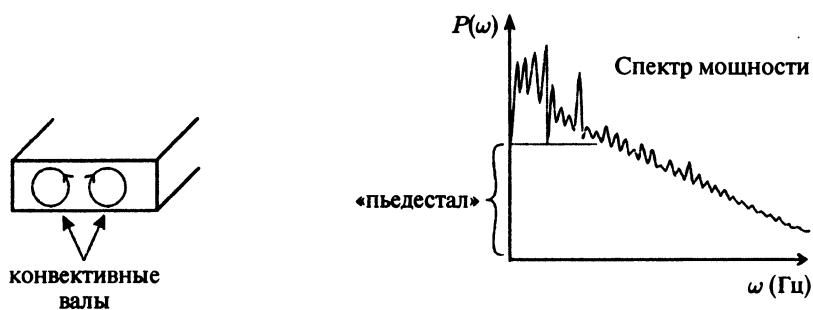


Рис. 32. Спектр мощности скорости жидкости в ячейке Бенара

полосу («пьедестал») (рис. 32). Такой вид спектра мощности типичен для хаотических сигналов $x(t)$

$$x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.22)$$

Спектр мощности

$$P(\omega) = |x(\omega)|^2. \quad (4.23)$$

Если бы $x(t)$ был многопериодическим сигналом, то $P(\omega)$ состоял бы из дискретных линий на частотах, входящих в сигнал. Наличие у хаотического сигнала широкого «пьедестала» в области низких частот свидетельствует о его полной аперiodичности.

Периодические химические реакции известны давно. Вспомним хотя бы слоистые полудрагоценные камни: агаты, яшмы, малахит. Колебания концентрации в них достигались двояким способом: увеличение концентрации происходит за счет наработки вещества в ходе химической реакции, а уменьшение — за счет сброса излишка вещества из реакционной среды в осадок или, если продукт газообразен, в атмосферу. Казалось (по крайней мере, так утверждало большинство специалистов), что осуществить периодическую химическую реакцию в одной фазе (без выделения газа и выпадения осадка) невозможно, так как, на первый взгляд, в гомофазной системе нет депо, куда можно было бы сбросить избыток вещества. Неожиданное решение проблемы предложил Б. П. Белоусов, но найденная им реакция была опубликована только в 1951 г. в реферативном журнале «Радиационная медицина» по настоянию С. Э. Шноля. В первоначальном виде реакционная система Б. П. Белоусова позволяла наблюдать объемные колебания

концентрации: в закрытой колбе реакционная смесь изменяла окраску от бледно-желтой до бесцветной и наоборот. Ученик С. Э. Шноля А. М. Жаботинский сделал изменение цвета более заметным: из коричневатого-красного в синий и обратно, а также предложил первую схему реакции. Ныне периодическая реакция носит имена Белоусова и Жаботинского и представляет собой окислительно-восстановительную реакцию под действием катализатора — системы Ce^{+3}/Ce^{+4} .

Недостающим ранее депо для сброса избытка вещества стали окисленные до различной степени органические молекулы. Переменная, обнаруживающая хаотическое поведение, — концентрация $c(t)$ ионов Ce^{4+} .

Если \bar{c} — среднее значение концентрации $c(t)$ за время T , т. е.

$$\bar{c} = \frac{1}{T} \int_0^T c(t) dt, \quad (4.24)$$

а

$$\hat{c}(t) = c(t) - \bar{c} = c(t) - \frac{1}{T} \int_0^T c(t) dt, \quad (4.25)$$

то величина

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T c(t) c(t + \tau) dt \quad (4.26)$$

называется *автокорреляционной функцией*. Автокорреляционная функция служит мерой корреляции между двумя значениями величины $c(t)$, разделенными временным интервалом τ . В хаотическом режиме $C(\tau)$ быстро (обычно — экспоненциально) убывает, в регулярном режиме автокорреляционная функция $C(\tau)$ либо постоянна, либо осциллирует (рис. 33).

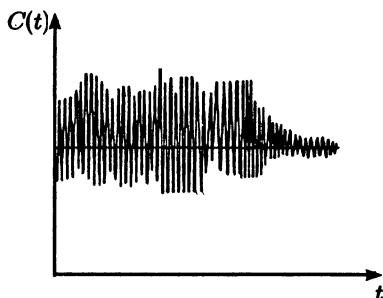


Рис. 33. Корреляционная функция концентрации одного из реагентов реакции Белоусова—Жаботинского

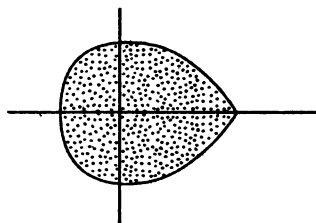


Рис. 34. Облако точек в сечении Пуанкаре в фазовом пространстве системы Энона—Хейлеса

О наступлении хаотического режима на глаз можно судить и по тому, что в сечении Пуанкаре фазового потока возникает облако точек (рис. 34).

Количественные меры хаоса

О выходе системы на хаотический режим можно судить не только на глаз, по качественным признакам: непериодическому и даже негладкому сигналу, сечению Пуанкаре, спектру мощности и автокорреляционной функции, но и по количественным характеристикам. Если качественные критерии позволяют констатировать выход системы на хаотический режим, то количественные меры хаоса позволяют сравнивать хаотические режимы и определять, какой из них более хаотичен (или, что то же, менее регулярен). Следует подчеркнуть, что приводимые ниже количественные меры хаоса характеризуют различные аспекты хаотических режимов, и не образуют в совокупности полного набора мер хаоса.

Показатель Ляпунова

Одна из отличительных особенностей нелинейных систем — чувствительная зависимость решений от начальных данных. Даже небольшого возмущения начальных условий достаточно для того, чтобы траектории в дальнейшем быстро (экспоненциально) разошлись. Пользуясь образом, заимствованным из рассказа «И грянул гром» Рея Брэдбери, столь высокую чувствительность к начальным условиям принято называть «эффектом бабочки» (даже взмаха крыльев бабочки достаточно, чтобы вызвать серьезные изменения в эволюции системы во времени).

Количественной мерой скорости экспоненциального разбегания траекторий служит показатель Ляпунова.

Пусть \mathbf{x}_0 — начальное значение траектории $f^N(\mathbf{x}_0)$, где N — номер итерации, f — функция, задающая отображение, а $\mathbf{x}_0 + \varepsilon$ — возмущенное начальное значение, ε — начальная погрешность, ошибка, или невязка, — возмущение начального значения \mathbf{x}_0 . Из точки $\mathbf{x}_0 + \varepsilon$ выходит траектория $f^N(\mathbf{x}_0 + \varepsilon)$. На N -ом шаге итерации различаются на величину

$$|f^{(N)}(\mathbf{x}_0) - f^{(N)}(\mathbf{x}_0 + \varepsilon)|, \quad (4.27)$$

которую можно представить в виде начальной погрешности ε , умноженной на некоторый коэффициент:

$$\varepsilon e^{N\lambda(\mathbf{x}_0)}. \quad (4.28)$$

Если $e^{N\lambda(\mathbf{x}_0)} = 1$, то погрешность с ростом номера итерации не изменяется, при $e^{N\lambda(\mathbf{x}_0)} > 1$ погрешность увеличивается и при $e^{N\lambda(\mathbf{x}_0)} < 1$ уменьшается.

Ясно, что

$$e^{N\lambda(\mathbf{x}_0)} = 1 \quad (4.29)$$

Лекция 4. Еще один взгляд на систему Э. Лоренца

соответствует

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = 0; \quad (4.30)$$

$$e^{N\lambda(\mathbf{x}_0)} > 1 \quad (4.31)$$

соответствует

$$\lambda(\mathbf{x}_0) > 0; \quad (4.32)$$

а

$$e^{N\lambda(\mathbf{x}_0)} < 1 \quad (4.33)$$

соответствует

$$\lambda(\mathbf{x}_0) < 0. \quad (4.34)$$

Показатель $\lambda(\mathbf{x}_0)$, определяющий скорость экспоненциального разбегания траекторий, называется показателем Ляпунова

$$|f^{(N)}(\mathbf{x}_0) - f^{(N)}(\mathbf{x}_0 + \varepsilon)| = \varepsilon e^{N\lambda(\mathbf{x}_0)}. \quad (4.35)$$

Логарифмируя обе части этого равенства (логарифм — натуральный!), получаем:

$$N\lambda(\mathbf{x}_0) = \ln \frac{|f^{(N)}(\mathbf{x}_0) - f^{(N)}(\mathbf{x}_0 + \varepsilon)|}{\varepsilon}. \quad (4.36)$$

Величина $\lambda(\mathbf{x}_0)$ зависит от выбора начальной точки \mathbf{x}_0 , и именно это подчеркивается выбором обозначения показателя Ляпунова (указание явной зависимости от \mathbf{x}_0):

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{|f^{(N)}(\mathbf{x}_0) - f^{(N)}(\mathbf{x}_0 + \varepsilon)|}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^{(N)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}. \end{aligned}$$

Примеры вычисления показателя Ляпунова

А. Треугольное отображение

$f^{(N)}$ имеет угловой коэффициент 2^N .

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{d^2^N x}{dx} \right| = \quad (4.37)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln 2^N = \ln 2 > 0. \quad (4.38)$$

Б. Треугольное отображение, зависящее от параметра r

Угловой коэффициент равен $2r$ (см. рис. 35).

$$\lambda(x_0) = \ln 2r. \quad (4.39)$$

При $r = 1/2$

$$\lambda(x_0) = 0. \quad (4.40)$$

При $r > 1/2$

$$\lambda(x_0) > 0. \quad (4.41)$$

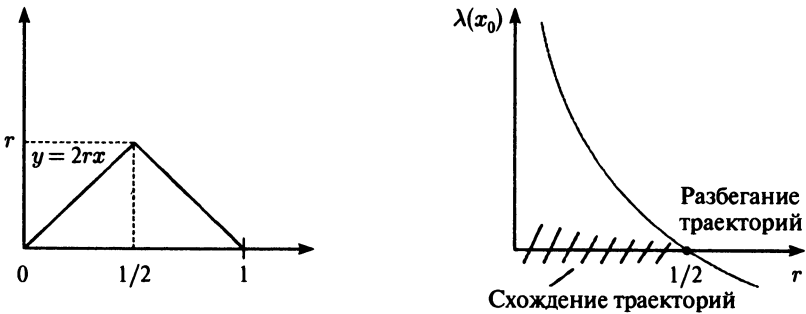


Рис. 35. Вычисление показателя Ляпунова для треугольного отображения, зависящего от параметра r

Лекция 4. Еще один взгляд на систему Э. Лоренца

Резюмируя, можно утверждать, что

$$e^{\lambda(x_0)} \quad (4.42)$$

— коэффициент усиления (при $\lambda(x_0) > 0$) или ослабления (при $\lambda(x_0) < 0$) начальной погрешности ϵ за одну итерацию;

$$e^{\lambda(x_0)N} \quad (4.43)$$

— коэффициент усиления или ослабления начальной погрешности ϵ за N итераций.

Вопросы и упражнения к лекции 4

1. Построить сечение Пуанкаре плоскостью $z = r - 1$ ($r > 1$) (в которой лежат обе дополнительные к $O = (0, 0, 0)$ неподвижные точки O_2 и O_3) системы Лоренца. Как изменяется картина в зависимости от параметра r ?
2. Исследовать систему Рёсслера

$$\dot{x} = -(y + z),$$

$$\dot{y} = x + \frac{1}{5}y,$$

$$\dot{z} = \frac{1}{5} + z(x - \mu),$$

порождающую при определенном значении параметра μ странный аттрактор Рёсслера:

- а) найти неподвижные точки;
- б) выяснить их устойчивость;
- в) как изменяется характер неподвижных точек в зависимости от параметра μ ?

Лекция 5

Количественные меры хаоса

Инвариантная плотность

Пусть

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (5.1)$$

— дискретное отображение, переводящее x_n в x_{n+1} . Зададим на оси x_{n-1} интервал Δ_0 начальных данных, распределенных с плотностью ρ_0 . Отображение (5.1) переводит интервал Δ_0 в интервал Δ_1 на оси x_{n+1} , на котором значения распределены с плотностью ρ_1 . Оператор, переводящий плотность ρ_0 в плотность ρ_1 , называется оператором Фробениуса—Перрона

$$\rho_1 = A\rho_0. \quad (5.2)$$

Пусть f^{-1} — отображение, обратное отображению f . Тогда

$$\Delta_0 = f^{-1}(\Delta_1). \quad (5.3)$$

Плотность, переходящая в себя под действием оператора Фробениуса—Перрона, называется инвариантной:

$$\rho^* = A\rho^*. \quad (5.4)$$

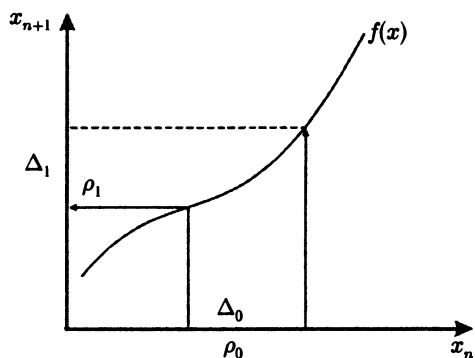


Рис. 36. К вычислению оператора Фробениуса—Перрона

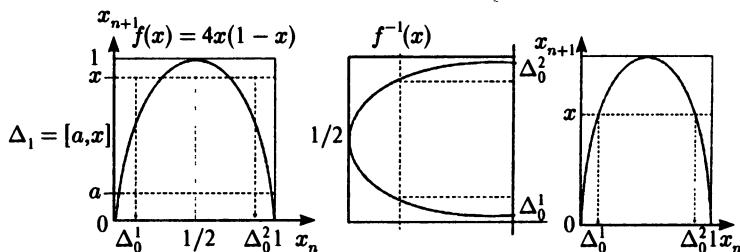


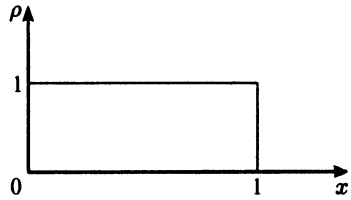
Рис. 37. К вычислению оператора Фробениуса—Перрона для логистического квадратичного отображения

Она показывает, с какой плотностью итерации отображения (5.1) «размазаны» по оси x_{n+1} .

Так как Δ_1 состоит только из точек, служащих образами точек из Δ_0 при отображении (5.1),

$$\int_{\Delta_1} \rho_1(v) dv = \int_{f^{-1}(\Delta_1)} \rho_0(u) du. \quad (5.5)$$

Рис. 38. Эволюция начального распределения под действием оператора Фробениуса—Перрона. Равномерное начальное распределение $\rho_0 \equiv 1$



Пусть $\Delta_1 = [a, x]$ — интервал оси x_{n+1} с переменным верхним пределом, а (5.1) — квадратичное отображение. Тогда оператор Фробениуса—Перрона можно представить в виде

$$\rho_1 = \frac{d}{dx} \int_{f^{-1}[a, x]} \rho_0(x) dx \quad (5.6)$$

Проследим, как эволюционирует плотность распределения точек под действием оператора Фробениуса—Перрона.

Заметим, что, как видно из рис. 38,

$$\Delta_0 = f^{-1}[a, x]$$

— неодносвязное множество, представляющее собой теоретико-множественную сумму (объединение) двух подынтервалов

$$\Delta_0^1 \cup \Delta_0^2,$$

где при $a = 0$

$$\Delta_0^1 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x} \right], \quad (5.7)$$

$$\Delta_0^2 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}, 1 \right]. \quad (5.8)$$

Уравнение Фробениуса—Перрона (5.3) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{d}{dx} \int_{f^{-1}[0,x]} \rho_0(x) dx = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^{f^{-1}} f(x) dx = f(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$= \frac{d}{dx} \int_0^{1/2-(1/2)\sqrt{1-x}} \rho_0(x) dx + \frac{d}{dx} \int_{1/2+(1/2)\sqrt{1-x}}^1 \rho_0(x) dx = \quad (5.10)$$

$$= \rho_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \quad (5.11)$$

$$- \rho_0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \left[\rho_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x} \right) + \rho_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x} \right) \right]. \quad (5.12)$$

При переходе от (5.10) к (5.11) мы воспользовались формулой дифференцирования интеграла по переменному верхнему пределу

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \quad (5.13)$$

Пусть $\rho_0(x) \equiv 1$ (рис. 38). Подставляя $\rho_0 \equiv 1$ в (5.12), получаем

$$\rho_1(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}} [1 + 1] = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}. \quad (5.14)$$

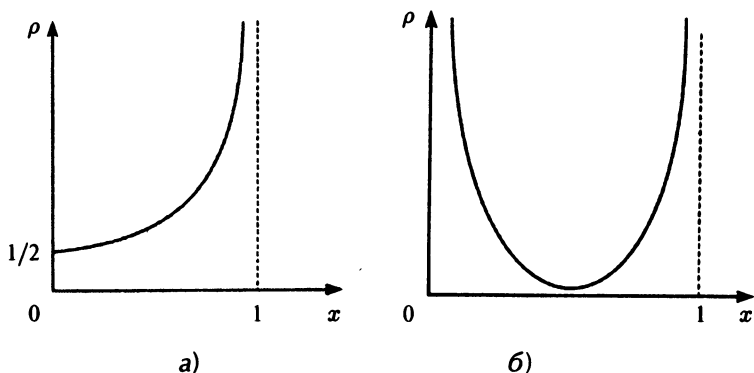


Рис. 39. Эволюция равномерного начального распределения под действием оператора Фробениуса—Перрона:
 а) $\rho_1 = 1/(2\sqrt{1-x})$; б) $\rho_2(x)$

Подставим полученное выражение (5.14) в (5.6):

$$\rho_2(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt{1-x}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}} \right\}. \quad (5.15)$$

Инвариантная плотность имеет следующий смысл: $\rho^*(x)$ — это «доля» всех итераций, попадающих в точку x .

$$\rho^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \delta[x - f^{(j)}(x_i)]. \quad (5.16)$$

Для треугольного отображения

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \left[\rho\left(\frac{x}{2}\right) + \rho\left(1 - \frac{x}{2}\right) \right]. \quad (5.17)$$

Корреляционная функция

Пусть $f^j(X_0)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$ — итерации дискретного отображения (5.1), N — число итераций, x_0 — начальное значение.

Введем среднее (по числу итераций) значение

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^{(j)}(x_0). \quad (5.18)$$

Зная \bar{x} , для каждой итерации $x_j = f^{(j)}(x_0)$ можно найти ее отклонение от среднего значения

$$\hat{x}_j = x_j - \bar{x}. \quad (5.19)$$

Рассмотрим две итерации, номера которых отличаются на m :

$$x_j = f^{(j)}(x_0) \quad \text{и} \quad x_{j+m} = f^{(j+m)}(x_0). \quad (5.20)$$

Тогда *корреляционной* (или *автокорреляционной*) функцией называется величина

$$C(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{x}_{m+j} \hat{x}_j. \quad (5.21)$$

Функция $C(m)$ служит мерой корреляции итераций, номера которых отличаются на m . Если орбита $\{f^{(j)}(x_0)\}$ хаотическая, то корреляция отсутствует, и $C(m)$ спадает до нуля.

Для треугольного отображения

$$C(m) = \frac{1}{12} \delta_{m,0}, \quad (5.22)$$

где $\delta_{m,0}$ — дельта-функция Кронекера, равная нулю при не совпадающих значениях индексов и единице при совпадающих значениях индексов. Так как в (5.19) один из индексов равен 0, формула (5.19) означает, что в случае треугольного отображения итерации коррелированы только при $m = 0$, т. е. если номера итераций совпадают: значения корреляций при $m \neq 0$ некоррелированы, а при $m = 0$ мы имеем не корреляции с различными номерами, а одну корреляцию.

Фрактальные размерности

Понятие фрактала, введенное в научный обиход Бенуа Мандельбротом, не имеет (по крайней мере пока) строгого определения. Следуя духу «Начал» Евклида, предложившего три описания линии, ни одно из которых не может претендовать на строгое определение с точки зрения современной математики (длина без ширины, граница двух областей и «то, что имеет одно измерение»), Мандельброт поясняет понятие фрактала как некоего образования, самоподобного или самоаффинного *в том или ином смысле*. Только такое нарочито широкое пояснение позволяет охватить без видимых досадных пробелов и потерь достаточно мощное множество объектов, достойных называться фракталами. Любая попытка дать более строгое определение отсекает какой-то достаточно емкий класс объектов, непозволительно сужая и обедняя мир фракталов. В этой связи нельзя не вспомнить вехи слова Л. И. Мандельштама, сравнивавшего чрезмерно ограничительные определения на начальном этапе существования научной дисциплины с губительным пристрастием заворачивать младенца в колючую проволоку.

Простейшие фракталы, такие, как канторовская пыль, снежинки и ломаная Хельге фон Коха, ковер и губка Серпинского, кривые дракона и кривые Пеано и Гильберта, обладают

регулярной, геометрически правильной, структурой. Каждый фрагмент такого геометрически правильного фрактала в точности повторяет всю конструкцию в целом. При менее точном следовании самоаффинности или самоподобию возникают другие, не столь регулярные (например, случайные фракталы). Их самоаффинность проявляется, например, в сохранении нормальности случайного распределения в различных масштабах, возможно, с различными дисперсиями и средними. Примерами случайных фракталов могут служить береговые линии, очертания некоторых государственных границ, поры в хлебе и зрелых сырах, границы доменов и зерен в кристаллах и т. д.

Примеры фракталов могут быть как континуальными, так и дискретными. Например, важными свойствами самоподобия обладает дискретная последовательность Акселя Туэ — Марстона Морса, возникающая в самых различных динамических ситуациях — от символической динамики до чисел Фибоначчи и треугольника Паскаля.

Красота фракталов двойка: она услаждает глаз (и слух), о чем убедительно свидетельствует, например, обошедшая весь мир выставка фрактальных изображений, организованная группой бременских математиков под руководством Пайтгена и Рихтера. Позднее экспонаты этой грандиозной выставки были запечатлены в иллюстрациях к книге Пайтгена и Рихтера «Красота фракталов».

Но существует и другой, более абстрактный, тонкий и возвышенный аспект красоты фракталов, открытый, по словам Ричарда Фейнмана, только умственному взору теоретика. В этом смысле фракталы прекрасны красотой трудной математической задачи. Дело в том, что Бенуа Мандельброт указал современникам (и, надо полагать, потомкам) на досадный пробел в «Началах» Евклида (неявное предположение о гладкости объектов), по которым, не замечая явного упущения, человечество на протяжении почти двух тысячелетий постигало геометрию окружа-

Что же такое фрактал?

ющего мира и училось математической строгости изложения. Разумеется, оба аспекта красоты фракталов тесно взаимосвязаны и не исключают, а взаимно дополняют друг друга, хотя каждый из них самодостаточен.

Подобно другим геометрическим понятиям, таким как точка, линия, поверхность и тому подобное, фрактал — это прежде всего абстракция, теоретическая модель реальности, результат предельного перехода, недостижимый в действительности.

Любой портрет фрактала — не более чем условное, выполненное с конечной разрешающей способностью и потому огрубленное изображение основной тенденции — тренда; своего рода карикатура, обладающая портретным сходством с оригиналом, но отличающаяся от портрета, выполненного в реалистической манере.

Что же такое фрактал?

Этот термин принадлежит Бенуа Мандельброту. В трех своих книгах («Фрактальные объекты: форма, случай и размерность» (1975), «Фрактальная форма, случай и размерность» (1977), «Фрактальная геометрия природы» (1977 и последующие издания)) Бенуа Мандельброт предложил изумленному миру по существу новую неевклидову геометрию — неевклидову не в смысле отказа от аксиомы о параллельности, принятой в традиционной евклидовой геометрии, и в замене ее другой аксиомой, как это было сделано в геометрии Н. И. Лобачевского и Я. Бойяи, а в смысле незримо присутствовавшего в «Началах» Евклида требования гладкости. Бенуа Мандельброт создал неевклидову геометрию негладких, шероховатых, зазубренных, изъеденных ходами, порами, трещинами и отверстиями, извилистых и тому подобное объектов, своего рода математических парий, по молчаливому уговору ранее исключавшихся

из рассмотрения в пользу более благообразных, усредненных, сглаженных, отполированных, спрямленных объектов. Между тем именно такие неправильные объекты составляют подавляющее большинство объектов природы. Сам Бенуа Мандельброт охарактеризовал созданную им теорию как морфологию бесформенного:

Почему геометрию часто называют «холодной» и «сухой»? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, береговой линии или дерева. Облака — не сферы, горы — не конусы, береговые линии — не окружности, древесная кора — не гладкая, молния распространяется не по прямой.

В более общем плане я утверждаю, что многие объекты в Природе настолько нерегулярные и фрагментированные, что по сравнению с Евклидом — термин, который в этой работе означает всю стандартную геометрию, — природа обладает не просто большей сложностью, а сложностью совершенно иного уровня. Число различных масштабов длины природных объектов для всех практических целей бесконечно велико.

Размерность Хаусдорфа—Безиковича

Усилиями российских топологов П. С. Александрова и П. С. Урысона по индукции была определена так называемая топологическая размерность. По определению, она равна 0 для точки, 1 — для линии, 2 — для поверхности или фигуры, 3 — для тела или пространства и т. д. Подчеркнем, что обычно, говоря о размерности объекта, имеют в виду его топологическую размерность, которая принимает целочисленные значения. Топологическая размерность «не чувствует» извилистости линии, изъязвленности или шероховатости поверхности и т. д.



Рис. 40. Топологическая размерность нечувствительна к гладкости кривой: для всех этих объектов она равна 1

Рассмотрим компактное, т. е. замкнутое и ограниченное множество. Вокруг каждого элемента этого множества как вокруг центра опишем сферу радиуса ϵ . Если множество бесконечно, то и таких сфер получится бесконечно много. Но по лемме Гейне—Бореля, для любого компактного множества существует конечное подпокрытие — конечный набор сфер радиуса ϵ , таких, что каждый элемент множества принадлежит, по крайней мере, одной сфере, не обязательно совпадая с ее центром.

Пусть

$$N(\epsilon) \quad (5.23)$$

— число сфер в конечном подпокрытии множества. Для гладкого объекта, например для отрезка прямой или окружности,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \neq \infty. \quad (5.24)$$

Но для негладких объектов

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) = \infty. \quad (5.25)$$

Это означает, что при разложении $N(\epsilon)$ в ряд по ϵ разложение содержит не только тейлоровскую, но и лорановскую часть.

Пусть

$$\frac{1}{\epsilon^D}, \quad D > 0, \quad (5.26)$$

— главный член лорановской части разложения $N(\epsilon)$ по ϵ .

Тогда при $\epsilon \rightarrow 0$

$$N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^D}. \quad (5.27)$$

Показатель D называется размерностью Хаусдорфа—Безиковича (в честь великого немецкого тополога Феликса Хаусдорфа и российского эмигранта, жившего в Кембридже, математика Безиковича).

Логарифмируя (5.27), получаем:

$$\log N(\epsilon) \approx -D \log \epsilon, \quad (5.28)$$

откуда

$$D \approx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{-\log \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log (1/\epsilon)}. \quad (5.29)$$

Числитель размерности Хаусдорфа—Безиковича — число элементов в конечном подпокрытии исходного компактного множества сферами радиуса ϵ , знаменатель — число, показывающее, сколько раз укладывается радиус сферы ϵ в единице длины.

Размерности Реньи

Венгерский математик Альфред Реньи предложил континуальное семейство размерностей, включающее в себя многие известные размерности, в том числе размерность Хаусдорфа—Безиковича (5.29).

По определению, q -я размерность Реньи определяется по формуле

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_{i=1}^N p_i^q}{\log \epsilon} \quad (5.30)$$

(p_i — вероятность попадания на i -ю компоненту фрактала).

При $q = 0$

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-1} \frac{\log \sum_{i=1}^N p_i^0}{\log \epsilon} = \frac{\log \sum_{i=1}^N 1}{-\log \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log (1/\epsilon)} \quad (5.31)$$

— размерность Хаусдорфа—Безиковича, т. е. размерность Реньи не зависит от q и совпадает с размерностью Хаусдорфа—Безиковича.

Для самоподобного фрактала с равновероятными компонентами

$$\begin{aligned} D_q &= \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_{i=1}^N (1/N)^q}{\log \epsilon} = \frac{1}{q-1} \frac{\log N(1/N)^q}{\log \epsilon} = \quad (5.32) \\ &= \frac{1}{q-1} \frac{\log N^{1-q}}{\log \epsilon} = \frac{1}{q-1} \cdot (1-q) \frac{\log N}{\log \epsilon} = D_0. \end{aligned}$$

Вопросы и упражнения к лекции 5

1. Вывести явный вид оператора Фробениуса—Перрона:
 - а) для r -ичного сдвига Бернулли;
 - б) для логистического отображения

$$y = rx(1-x), \quad 0 < r \leq 4.$$

2. Найти инвариантную плотность для r -ичного сдвига Бернулли, треугольного отображения, зависящего от параметра r , и для логистического отображения

$$y = rx(1-x), \quad 0 < r \leq 4.$$

Лекция 6

Количественные меры хаоса (продолжение)

Топологическая сопряженность

Два отображения f и φ называются *топологическими сопряженными*, если существует такое обратимое преобразование h , что

$$f = h^{-1}\varphi h, \quad (6.1)$$

т. е. если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & C \\ \varphi \downarrow & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{h} & B \end{array} \quad (6.2)$$

коммутативна, т. е. путь из A в B :

$$ABC: hf, \quad (6.3)$$

совпадает с путем из A в B :

$$ADB: \varphi h. \quad (6.4)$$

Отношение топологической сопряженности симметрично: если отображение f топологически сопряжено с отображением φ , то и отображение φ топологически сопряжено с отображением f :

$$\varphi = hf h^{-1}. \quad (6.5)$$

Если преобразование $h(x)$, устанавливающее топологическое сопряжение отображений f и h , известно, то характеристики более простого отображения могут быть пересчитаны в характеристики более сложного отображения. Например, инвариантная плотность ρ_f квадратичного отображения может быть получена из инвариантной плотности ρ_φ треугольного отображения по формуле

$$\rho_f = \rho_\varphi[h(x)] \cdot \left| \frac{dh}{dx} \right|, \quad (6.6)$$

доказательство которой предоставляется читателю в качестве упражнения к этой лекции.

Эмпирические фрактальные размерности

В лекции 5 мы говорили о континуально бесконечном семействе размерностей Реньи

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum p_i^q}{\log \varepsilon}, \quad (6.7)$$

содержащем многие размерности, выведенные из различных соображений другими авторами. Например, при $q = 0$ мы

получаем

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_1^N 1}{-\log \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log (1/\epsilon)} \quad (6.8)$$

размерность Хаусдорфа—Безиковича. При $q \rightarrow 1$, раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья, получаем так называемую информационную размерность

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\sum_k p_k \log p_k}{\log (1/r)}; \quad (6.9)$$

при $q = 2$ — корреляционную размерность

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log \epsilon}, \quad (6.10)$$

где $C(r)$ — корреляционная функция.

Далеко не все члены семейства размерностей Реньи (6.7) востребованы, т. е. используются при изучении фрактальных сред и протекающих на них процессов. Наличие во многих формулах фрактальных размерностей предельных переходов затрудняет их применение при исследовании реальных фрактальных сред, так как экспериментальные данные позволяют судить только об общем ходе — «тренде» — соответствующей зависимости. В практике эксперимента используются некоторые другие размерности, не входящие в семейство (6.7), но легко вычисляемые по экспериментальным данным. Например, к числу таких размерностей относится так называемая массовая размерность, характеризующая степенной закон, по которому нарастает масса фрактала, вписанного в сферу (окружность, гиперсферу) радиуса R :

$$M \sim R^D, \quad (6.11)$$

где M — масса фрактала, R — радиус сферы, а D — массовая размерность (например, для фигур Лихтенберга, образуемых при электрическом разряде в диэлектрике, показатель D удовлетворяет неравенству

$$1,7 < D < 1,9 \quad (6.12)$$

и не совпадает с топологической размерностью плоских фигур, равной 2).

Гипотеза Х. А. Лоренца и спектральная размерность

В 1908 г. Пауль Вольфскель завещал Институту математики в немецком университетском городе Гёттингене 100 000 немецких марок в качестве награды тому, кто сумеет доказать (или опровергнуть) знаменитую Великую теорему Ферма, утверждающую, что при целом $n \geq 3$ уравнение

$$x^n + y^n = z^n \quad (6.13)$$

не имеет решений среди целых чисел. На проценты со 100 000 немецких марок Давид Гильберт приглашал самых выдающихся математиков и физиков первой четверти XX в. выступить с докладами о проблемах науки новейшего времени перед учителями гимназий в свободный от обязательных занятий «летний семестр». В 1910 г. первым с докладом о специальной теории относительности выступил Анри Пуанкаре, в 1913 г. — Хендрик Антон Лоренц, в 1918 г. — Нильс Бор.

В своем выступлении Лоренц сформулировал интересную физико-математическую проблему: как изменяется спектр собственных колебаний континуума при изменении его формы. Например, как изменяется спектр колебаний мембраны литавр

при изменении формы ее контура? Гильберт высказал опасение, что эта проблема не будет решена при жизни его поколения. К счастью, Гильберт заблуждался: проблема Лоренца вскоре была решена одним из присутствовавших на лекции молодых математиков Германом Вейлем.

Вейль показал, что при достаточно гладкой, но в остальном произвольной границе резонатора и достаточно большой частоте f число резонансов, не превышающих f , определяется соотношением

$$N_3(f) = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{f}{c} \right)^3; \quad (6.14)$$

в двумерном случае —

$$N_2(f) = \pi \cdot S \cdot \left(\frac{f}{c} \right)^2, \quad (6.15)$$

где V — объем, S — площадь резонатора; c — скорость звука (или света, если речь идет об электромагнитных колебаниях).

Как изменяются соотношения Вейля (6.14) и (6.15), если отказаться от ограничения достаточно гладкого резонатора? Например, как выглядят аналоги соотношений Вейля для резонаторов с фрактальной границей?

Физик из Ливерпуля М. В. Берри предположил, что

$$|\Delta N(f)| = \left(L \cdot \frac{f}{c} \right)^D, \quad (6.16)$$

где L — характерная длина, а D — размерность Хаусдорфа—Безиковича.

Нетрудно понять, что показатель в первой части формулы (6.16) вряд ли совпадает с размерностью Хаусдорфа—Безиковича: частотный спектр колеблющейся среды зависит

от характеристик связанного «остова», т. е. определяется размерностью Минковского—Булигана:

$$D_{M-B} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log F(\varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)} + 2 \quad (6.17)$$

(в предположении, что предел в правой части существует), где $F(\varepsilon)$ — так называемая «сосиска Минковского» — ее объем — «содержимое Минковского» — суммарная площадь (или суммарный объем кругов (сфер) радиуса ε), покрывающих фрактал.

Манфред Шредер в своей книге «Фракталы, хаос, степенные законы. Крохотные фрагменты из бесконечного рая» высказал гипотезу о том, что

$$N_2(f) = \left(a \frac{f}{c} \right)^d, \quad (6.18)$$

где a — некоторая характерная длина, d — подходящая спектральная размерность.

Вопросы и упражнения к лекции 6

1. Доказать, что f и φ — топологически сопряженные отображения, т. е. если существует обратимое преобразование $h(x)$, такое, что

$$f = h^{-1} \varphi h, \quad (6.19)$$

то инвариантные плотности ρ_f и ρ_φ этих отображений связаны между собой соотношением

$$\rho_f = \rho_\varphi[h(x)] \left| \frac{dh}{dx} \right|. \quad (6.20)$$

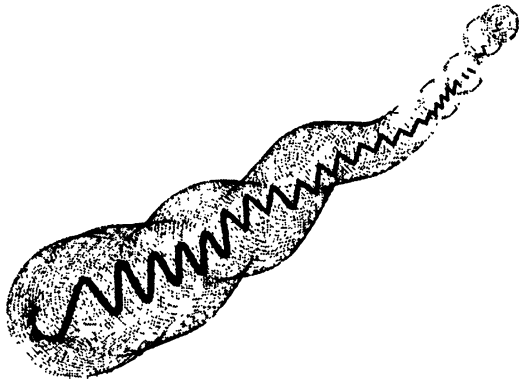


Рис. 41. К выводу размерности Минковского—Булигана:
«сосиска Минковского»

2. Как связаны между собой показатели Ляпунова топологически сопряженных отображений?
3. Доказать, что для гладких (нефрактальных) объектов размерность Хаусдорфа—Безиковича совпадает с их топологической размерностью.

Лекция 7

Геометрически регулярные фракталы

Приведенные ниже регулярные фракталы самоподобны: каждый фрагмент любого из них при надлежащем увеличении воспроизводит структуру всего фрактала.

Канторовская пыль

Этот фрактал строится следующим образом. Единичный отрезок делится на 3 равные части, и средняя треть выбрасывается. Аналогичные операции производятся над каждой из оставшихся третей: они делятся на 3 равные части, средняя треть

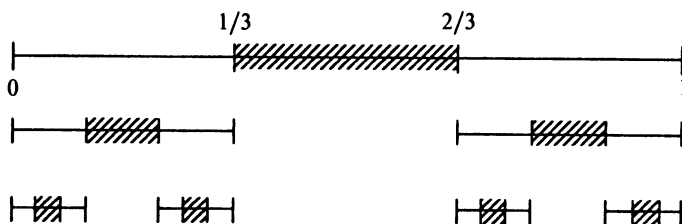


Рис. 42. Канторовская пыль

выбрасывается, а две остальные сохраняются. В пределе после бесконечного повторения процедуры мы получаем точечное множество из счетного числа несвязных фрагментов — канторовскую пыль. Суммарная длина фрагментов предельного множества равна нулю, а его размерность Хаусдорфа—Безиковича

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309 \dots \quad (7.1)$$

Ломаная и снежинка фон Коха

Единичный отрезок делится на 3 равные части, средняя часть выбрасывается, а на ее месте как на основании строится равносторонний треугольник (точнее, 2 его боковые стороны), после чего вся процедура повторяется снова и снова. Периметр ломаной после каждого акта увеличивается в $4/3$ раза, поэтому при бесконечном повторении процедуры периметр ломаной неограниченно возрастает.

Выбрав в качестве исходного объекта не единичный отрезок прямой, а равносторонний треугольник со сторонами единичной длины, мы с помощью той же процедуры получим предельное множество, известное под названием «снежинка Коха».

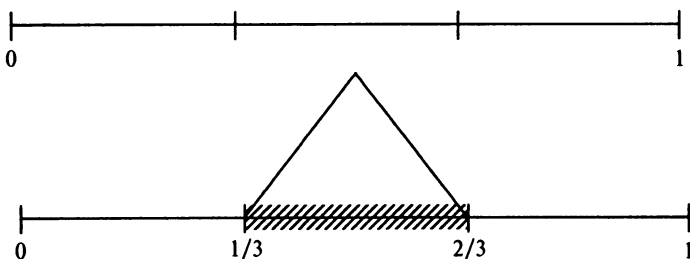


Рис. 43. Ломаная фон Коха

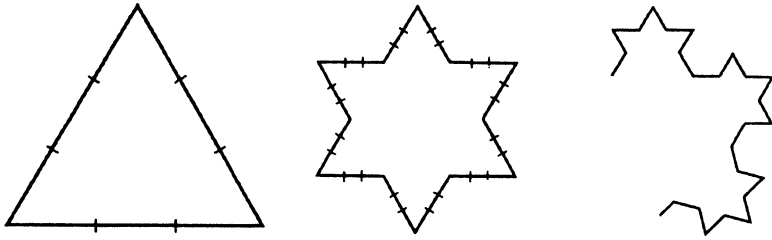


Рис. 44. Снежинка Коха

Его периметр равен бесконечности, а размерность Хаусдорфа—Безиковича

$$D = \frac{\log 3}{\log 4} = 1,2618 \dots \quad (7.2)$$

Салфетка Серпинского

В качестве исходного объекта выберем равносторонний треугольник с единичными сторонами. Проведем прямые, соединяющие попарно середины сторон, и выбросим центральный треугольник, уменьшив тем самым площадь исходного треугольника на $1/4$. Над каждым из трех оставшихся малых треугольников сделаем такую же операцию. В пределе после бесконечного повторения процедуры мы получим связанное

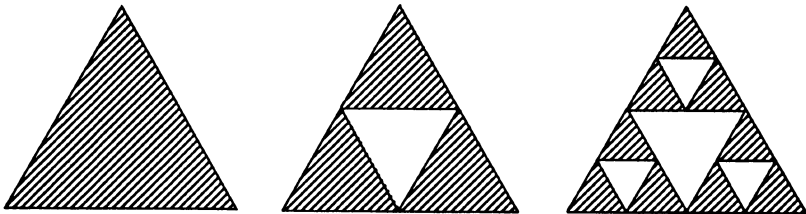


Рис. 45. Салфетка Серпинского

множество нулевой площади

$$S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0, \quad (7.3)$$

где S — площадь исходного треугольника. Это множество называется салфетка Серпинского (в честь польского математика Вацлава Серпинского). Размерность Хаусдорфа—Безиковича салфетки Серпинского равна

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58 \dots \dots \quad (7.4)$$

Ковер Серпинского

Рассмотрим единичный квадрат. Разделим его стороны на 3 равные части и через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам квадрата. Эти прямые разделят исходный квадрат на 9 меньших квадратов. Выбросив центральный квадрат, мы получим 8 меньших квадратов. Повторим описанную

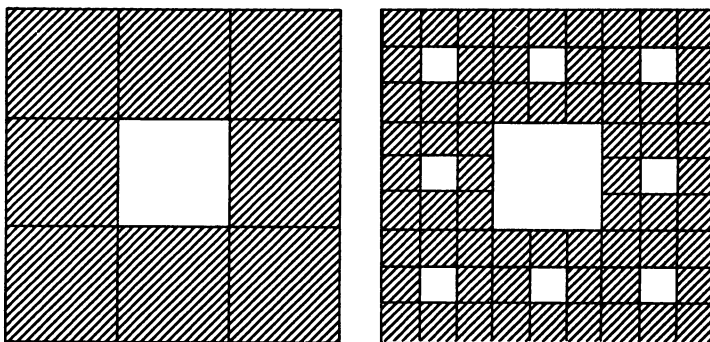


Рис. 46. Ковер Серпинского

выше процедуру над каждым из 8 меньших квадратов. После каждого повторения процедуры площадь оставшихся квадратов нового поколения составляет $8/9$ от суммарной площади квадратов предыдущего поколения. Предельная фигура — ковер Серпинского имеет площадь

$$S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0, \quad (7.5)$$

а размерность Хаусдорфа—Безиковича ковра Серпинского:

$$D = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,89 \dots \quad (7.6)$$

Трехмерный аналог салфетки Серпинского

Проведем через середины ребер тетраэдра плоскости, параллельные его граням, и выбросим центральный из 4 получившихся малых тетраэдров, оставив 4 малых тетраэдра, примыкающих к вершинам исходного тетраэдра. Применим описанную процедуру к каждому из оставшихся тетраэдров, и после ее повторения бесконечное число раз получим предельное множество

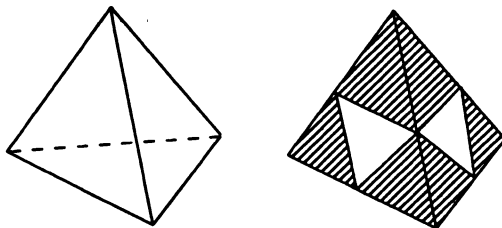


Рис. 47. Трехмерный аналог салфетки Серпинского

нулевого объема с размерностью Хаусдорфа—Безиковича

$$D = \frac{\log 4}{\log 2} = 2. \quad (7.7)$$

Именно наличие таких редких исключений — фракталов с целочисленной размерностью Хаусдорфа—Безиковича — вынудило отказаться от первоначального варианта определения фракталов как объектов с дробной размерностью Хаусдорфа—Безиковича.

Губка Серпинского

Трехмерный аналог существует и у ковра Серпинского. Возьмем единичный куб и, разделив его ребра на 3 части, проведем через точки деления плоскости, параллельные граням куба. Эти плоскости разобьют исходный куб на $3^3 = 27$ меньших кубов. Выбросим 3 колонки, проходящие через середины граней, т. е. всего 7 меньших кубов. Над каждым из $27 - 7 = 20$ оставшихся меньших кубов продelaем аналогичную процедуру. После бесконечного повторения описанной процедуры получим предельное множество — губку Серпинского с нулевым объемом и размерностью Хаусдорфа—Безиковича

$$D = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,72683 \dots \quad (7.8)$$

Помимо приведенных выше фрактальных размерностей хаотическую структуру и хаотическое поведение динамических систем характеризуют различные энтропии:

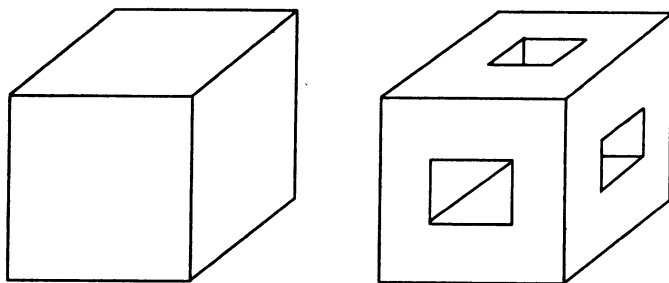


Рис. 48. Губка Серпинского

- **Обобщенная энтропия Реньи порядка q :**

$$S_q = \frac{1}{q-1} \log \sum_{i=1}^N p_i^q, \quad (7.9)$$

где N — число состояний системы (или фрагментов фрактала), p_i — вероятность i -го состояния (i -го фрагмента фрактала).

При $q = 1$ обобщенная энтропия Реньи переходит в известную энтропию Шеннона:

$$S_1 = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i. \quad (7.10)$$

- **Энтропия Шеннона S_i** служит количественной мерой хаотического поведения системы, характеризуя быстроту забывания информации Колмогорова—Синяя. Для систем с регулярным хаотическим поведением информация Колмогорова—Синяя равна нулю, а для динамических систем с хаотическим поведением и экспоненциальным разбеганием траекторий информация Колмогорова—Синяя положительна.

Лекция 7. Геометрически регулярные фракталы

Вопросы и упражнения к лекции 7

1. В каких размерностях евклидова пространства аналоги салфетки Серпинского имеют целую размерность Хаусдорфа—Безиковича?
2. Вычислить размерность Хаусдорфа—Безиковича для диссипативного преобразования пекаря (baker map) (см. рис. 49):

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1},$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} ay_n & \text{при } 0 \leq x_n < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} + ay_n & \text{при } \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1, \end{cases}$$

$$a < 1.$$

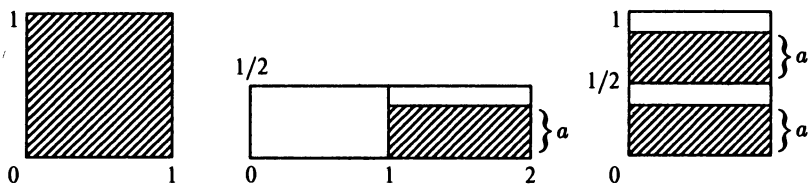


Рис. 49. Диссипативное преобразование пекаря

Лекция 8

Мультифракталы

Сколь ни обширен и разнообразен «репертуар» фрактальных размерностей (см. лекции 6 и 7), характеризующих хаотичность фрактальных сред и сложных режимов динамических систем, все же отдельных размерностей оказывается недостаточно: существуют фракталы, которые можно охарактеризовать не отдельным числом — значением какой-то фрактальной размерности, а только функцией — спектром размерностей. Фракталы, характеризуемые целым спектром размерностей, представляют собой как бы несколько «втиснутых» одна в другую фрактальных структур и называются мультифракталами.

Рассмотрим мультипликативный случайный процесс, преобразующий начальное равномерное распределение плотности вероятности $p(x) = 1$ на $[0, 1]$ в распределение плотности вероятности, равное p на правой половине интервала $1/2 < x \leq 1$ и $(1 - p)$ — на левой половине $0 < x \leq 1/2$ (рис. 50).

При второй итерации каждая из половин единичного интервала делится пополам, а плотность вероятности перераспределяется с коэффициентом p на правой половине подотрезка и с коэффициентом $(1 - p)$ — на левой половине подотрезка.

Физическую реализацию такого мультипликативного случайного процесса мы получим, взяв пучок фотонов от обычной

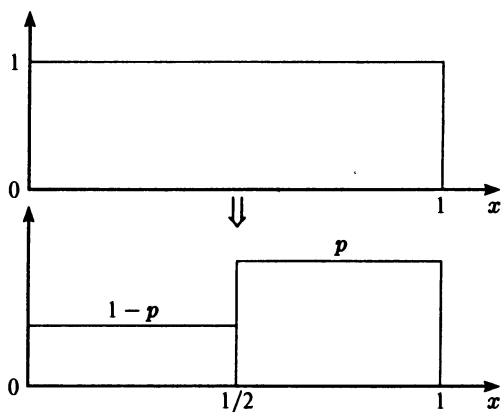


Рис. 50. Первая итерация мультипликативного случайного процесса

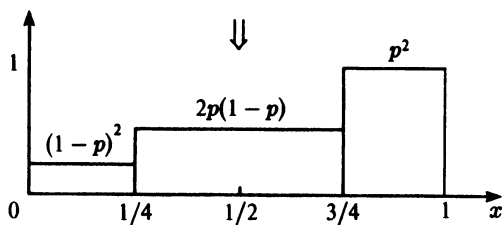


Рис. 51. Вторая итерация мультипликативного случайного процесса

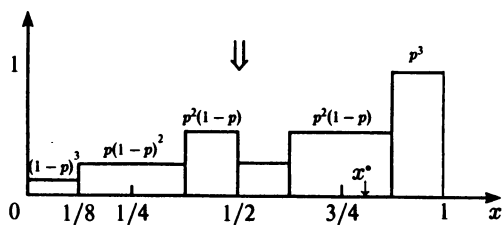


Рис. 52. Третья итерация мультипликативного случайного процесса

лампы накаливания и разделив его на две части. При каждом делении пучка пополам число фотонов в половинах не будет одинаковым. С такой же картиной мы встретимся, рассматривая электромагнитное излучение в полости. Прodelав в стенке полости небольшое отверстие, мы получим действующую модель излучения черного тела — того самого, при изучении которого Макс Планк вывел свою знаменитую гипотезу квантов, которую сначала считал чисто математической, интерполяционной гипотезой, лишенной какого бы то ни было физического смысла.

В пределе при $n \rightarrow \infty$ мы получаем самоаффинное распределение плотности вероятности, так как по направлению оси x отрезки всякий раз дробятся пополам (т. е. преобразуются с коэффициентом подобия $1/2$), а плотность вероятности преобразуется с коэффициентом подобия p на правых половинах отрезков и с коэффициентом подобия $(1 - p)$ — на левых половинах.

Последовательность, в которой точка x оказывается то в правой, то в левой половине отрезка, зафиксирована в двоичном разложении числа x , так как попадание в левую половину означает появление нуля в k -м знаке двоичного разложения, а попадание в правую половину означает появление единицы в k -м знаке (k — номер итерации). Например, точка x^* в нижней части рис. 52 имеет двоичное разложение

$$x^* = 0,110, \quad (8.1)$$

так как при первой и второй итерации она оказалась в правых половинах, а при третьей — в левой половине отрезка.

После n итераций вероятность попасть в интервал

$$m \cdot 2^{-n} < x < (m + 1) \cdot 2^{-n} \quad (8.2)$$

равна

$$p^k(1-p)^{n-k}, \quad (8.3)$$

где k — число единиц среди первых n знаков двоичного разложения числа x .

В пределе при $n \rightarrow \infty$ распределение плотности вероятности $P(x)$ удовлетворяет, в силу сказанного выше, функциональному уравнению

$$P(x) = \frac{1}{p-1} P\left(\frac{x}{2}\right). \quad (8.4)$$

Так как после n -й итерации единичный отрезок $[0, 1]$ оказывается разделенным на 2^n отрезков длиной 2^{-n} каждый и отрезки примыкают один к другому вплотную без наложений и пробелов, размерности Хаусдорфа—Безиковича предельного распределения вероятности (фрактального вследствие самоаффинности — самоподобия по оси x с коэффициентом $1/2$ и по оси y с другим коэффициентом $1/1-p$)

$$D = 1. \quad (8.5)$$

Мы видим, что в данном случае размерность Хаусдорфа—Безиковича малоинформативна: по существу она отражает только «сплошность» предельного распределения плотности вероятности $P(x)$ (отсутствие в нем щелей и отверстий).

Более содержательно характеризует мультифрактал плотность распределения вероятностей по интервалам. Например, при $n = 6$; $x = 1/5 = 0,00110011$; $k = 2$. Следовательно, на интервале

$$0,001100 = \frac{12}{64} < x < 0,001101 = \frac{13}{64} \quad (8.6)$$

длины 2^{-6} , содержащем $x = 1/5$, плотность вероятности равна

$$p^2(1-p)^4. \quad (8.7)$$

Всего таких интервалов после 6 итераций

$$\binom{n}{k} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15. \quad (8.8)$$

Это те самые 15 интервалов, в которых x имеет двоичные разложения, среди первых 6 цифр которых поровну нулей и единиц.

Всего после n итераций разбиение содержит

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (8.9)$$

интервалов длиной 2^{-n} каждый с плотностью вероятности

$$(1-p)^k p^{n-k}. \quad (8.10)$$

Полная вероятность попадания на эти отрезки равна

$$p_{n/k} = C_n^k (1-p)^k p^{n-k}, \quad (8.11)$$

$$\sum p_{n/k} = 1. \quad (8.12)$$

Биномиальный коэффициент (8.9) удобно представить в виде

$$\binom{n}{k} \approx \left(\frac{k}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-n} = 2^{nH(k/n)}, \quad (8.13)$$

где мы воспользовались формулой Стирлинга

$$m! = \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m$$

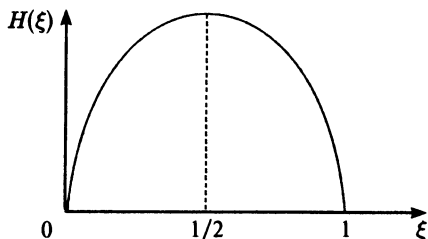
для факториалов и пренебрегли множителем

$$\left(\frac{n}{2\pi k(n-k)} \right)^{1/2},$$

где $H(\xi)$ — энтропия по Шеннону (см. рис. 53):

$$H(\xi) = -\xi \log_2 \xi - (1 - \xi) \log_2(1 - \xi). \quad (8.14)$$

Соотношение (8.13) показывает взаимосвязь между фрактальными размерностями и энтропиями, о которой упоминалось в конце лекции 7. Пусть D — размерность Хаусдорфа—Безиковича совокупности интервалов с общей плотностью вероятности (8.10):



$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log C_n^k}{n \log(1/\epsilon)}, \quad (8.15)$$

Рис. 53. Энтропия $H(\xi)$ по Шеннону

при $\epsilon = 1/2$

$$D = H(\xi). \quad (8.16)$$

Таким образом, в зависимости от значения x (вероятности, сосредоточенной на совокупности интервалов — носителе), мы получаем из (8.16) различные размерности Хаусдорфа—Безиковича.

Значения $H(\xi)$ колеблются от $H(\xi) = 0$ для $x = 0$ и $x = 1$ до $H(\xi) = 1$ при $\xi = 0,5$. Именно поэтому такие фракталы получили название мультифракталов. Заметим, что при заданной фрактальной размерности $D = H(\xi)$ носители распределены по всему единичному интервалу: хотя мультифракталы строятся по четкому алгоритму (и поэтому вполне детерминистичны),

они менее регулярны, чем фракталы, но не столь хаотичны, как случайные фракталы.

Размерность Хаусдорфа—Безиковича характеризует не только геометрию носителя вероятности

$$(1 - p)^k p^{n-k} (2^{-n}), \quad (8.17)$$

но и характер изменения самой вероятности (8.17) при $n \rightarrow \infty$.

Условие Липшица

Если для любых точек x_1, x_2 , принадлежащих отрезку $[a, b]$, приращение функции $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L \cdot |x_1 - x_2|^\alpha, \quad (8.18)$$

то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица порядка α . Величина α называется показателем Липшица—Гёльдера (условие Гёльдера соответствует неравенству (8.18) при $\alpha < 1$).

Показатель Липшица—Гёльдера для функции (8.17), характеризующий скорость обращения вероятности (8.17) в нуль или бесконечность при $n \rightarrow \infty$ определяется соотношением

$$\alpha(\xi) = \frac{\xi \log p + (1 - \xi) \log (1 - p)}{\log \varepsilon}, \quad (8.19)$$

где $\xi = k/n$, $\varepsilon = 1/2$ (так как при каждой итерации мы делим отрезки предыдущего разбиения пополам).

Из (8.19) следует, что $\alpha(\xi)$ линейно зависит от ξ , причем $\alpha(\xi)$ монотонно возрастает при $p < 0,5$. При $\xi = 0$ $\alpha = \alpha_{\min} = -\log_2(1 - p)$; при $\xi = 1$ $\alpha = \alpha_{\max} = -\log_2 p$.

Лекция 8. Мультифракталы

Величина α_{\min} соответствует наименее, а величина α_{\max} — наиболее вероятной части мультифрактала.

Максимум мультифрактального спектра

$$f(\alpha) \equiv D(\xi(\alpha)). \quad (8.20)$$

Вопросы и упражнения к лекции 8

1. Доказать, что

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{dD}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{\log \xi - \log(1 - \xi)}{\log p - \log(1 - p)}. \quad (8.21)$$

2. Найти точку $(\alpha_1, f(\alpha_1))$ на кривой $f(\alpha)$, в которой

$$\frac{df}{d\alpha} = 1. \quad (8.22)$$

3. Доказать, что значение $f(\alpha_1)$ равно информационной размерности D_1 .
4. Доказать, что точка $(\alpha_1, f(\alpha_1))$ лежит на касательной к кривой $f(\alpha)$ проходящей через начало координат с угловым коэффициентом, равным 1.

Лекция 9

Процессы на фрактальных средах

По Мандельброту, фракталом называется любой объект, самоподобный или самоаффинный в том или ином смысле. В духе Эрлангенской программы Ф. Клейна, определяющей любую геометрию как науку об инвариантах соответствующей группы преобразований, фрактальную геометрию можно определить как геометрию, занимающуюся изучением степенных законов — инвариантов группы аффинных (в частном случае подобных) преобразований.

Подробному изложению группы преобразований подобия посвящена лекция 10, и мы сейчас не будем останавливаться на рассмотрении аффинных и подобных преобразований.

Сложная геометрия фрактальных сред оказывает сильное влияние на протекание различных процессов. Фрактальные среды иначе, чем традиционная сплошная среда, колеблются, проводят электричество, на них иначе происходит диффузия и т. д.

Диффузия

Диффузия на фрактальных средах протекает медленнее, чем в обычной сплошной среде, так как частицы диффундирующего вещества вынуждены двигаться по узким каналам сложной

конфигурации с тупиками, резкими поворотами и сужениями. Диффузия в пористой среде определяется не только фрактальной сетью каналов и пор, геометрия которых, и в частности фрактальные размерности, изменяются по мере заполнения каналов диффундирующим флюидом, но и фрактальным твердым остовом (стенок пор). В традиционной сплошной среде диффузия описывается моделью случайных блужданий: частица, находящаяся в центре окружности, может в следующий момент времени оказаться равновероятно в любой точке окружности. Среднеквадратичное смещение частицы $\langle \xi^2 \rangle$ удовлетворяет соотношению Эйнштейна:

$$\langle \xi^2 \rangle = 2Dt, \quad (9.1)$$

т. е. линейно зависит от времени t . Соотношение Эйнштейна (9.1) выполняется в евклидовом пространстве любой размерности α , даже если случайные положения частицы имеют распределение, отличное от нормального.

В случае диффузии во фрактальной среде соотношение Эйнштейна (9.1) заменяется его фрактальным обобщением:

$$\langle \xi^2 \rangle = \sigma^2 t^\alpha, \quad (9.2)$$

где $\alpha < 1$. Показатель α зависит от фрактальных размерностей сети каналов и твердого остова. Аналогично, вместо классического уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad (9.3)$$

где Δu — лапласиан от u , диффузия во фрактальной среде описывается уравнением диффузии с дробной производной по времени

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \Delta u. \quad (9.4)$$

Производная и интеграл дробного порядка

Производная дробного порядка $p < 1$ (так называемая правая производная)

$$(D_{\alpha^+}^{\beta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \times \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\beta}} \quad (9.5)$$

совпадает с решением

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \times \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\beta}} \quad (9.6)$$

интегрального уравнения Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\alpha}^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\beta}} = f(x), \quad (9.7)$$

$$x > \alpha, \quad 0 < \beta < 1.$$

Интеграл дробного порядка γ возникает при замене в формуле n -кратного интеграла

$$\int_{\alpha}^x dx \int_{\alpha}^x dx \cdots \int_{\alpha}^x \varphi(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt \quad (9.8)$$

факториала $(n-1)!$ на гамма-функцию Эйлера $\Gamma(n)$ и целого числа n на дробное число γ .

Интеграл дробного порядка

Биномиальный коэффициент

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)}. \quad (9.9)$$

Записанная через гамма-функцию Эйлера формула (9.9) для биномиального коэффициента

$$\binom{n}{k}$$

может быть распространена с целых n и k на произвольные (не только дробные, но и комплексные) α и β .

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}. \quad (9.10)$$

Интегральное уравнение Абеля имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad x > \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (9.11)$$

а его решение —

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha}}. \quad (9.12)$$

n -кратный интеграл определяется выражением

$$\underbrace{\int_{\alpha}^x dx \int_{\alpha}^x dx \dots \int_{\alpha}^x \varphi(x) dx}_{n \text{ раз}} = \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}}_{\Gamma(n)} \int_{\alpha}^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt. \quad (9.13)$$

Оператор отражения

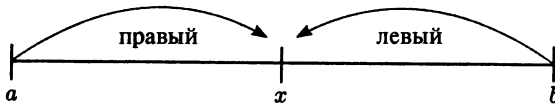


Рис. 54. Правый и левый интегралы дробного порядка

По определению, существуют два интеграла дробного порядка α — правый

$$(I_{a^+}^x \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a \quad (9.14)$$

и левый

$$(I_{b^-}^x \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b. \quad (9.15)$$

Оператор отражения

При вычислении интегралов дробного порядка полезно использовать оператор Q отражения относительно середины отрезка:

$$Q\varphi(x) = \varphi(a + b - x), \quad (9.16)$$

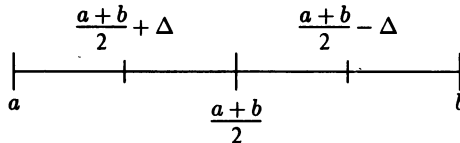


Рис. 55. Оператор отражения Q

позволяющий переводить правый интеграл дробного порядка в левый (и наоборот).

1. Середина отрезка $(a + b)/2$ — неподвижная точка оператора Q :

$$Q\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \varphi\left(a+b - \frac{a+b}{2}\right) = \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (9.17)$$

2. $x < \frac{a+b}{2}$, $x = \frac{a+b}{2} - \Delta$.

$$\begin{aligned} Q\varphi(x) &= Q\left(\varphi\left(\frac{a+b}{2} - \Delta\right)\right) = \\ &= \varphi\left(a+b - \frac{a+b}{2} + \Delta\right) = \varphi\left(\frac{a+b}{2} + \Delta\right). \end{aligned} \quad (9.18)$$

3. $x > \frac{a+b}{2}$, $x = \frac{a+b}{2} + \Delta$.

$$\begin{aligned} Q\varphi(x) &= Q\left(\varphi\left(\frac{a+b}{2} + \Delta\right)\right) = \\ &= \varphi\left(a+b - \frac{a+b}{2} - \Delta\right) = \varphi\left(\frac{a+b}{2} - \Delta\right). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Волновые процессы во фрактальных средах

Вместо обычного волнового уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad (9.20)$$

где Δu — лапласиан от функции u , волновое уравнение во фрактальной среде имеет вид

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \Delta u, \quad (9.21)$$

где β — дробный порядок производной по времени, или даже

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \Delta^\gamma u, \quad (9.22)$$

где Δ^γ — оператор Лапласа дробного порядка.

Колебания во фрактальной среде

В лекции 6 мы упоминали о предложенном Германом Вейлем решении проблемы Лоренца о связи формы резонатора и его спектра. Впоследствии известный специалист по теории вероятностей Марк Кац сформулирует проблему Х. А. Лоренца в острой, запоминающейся форме: «Можно ли услышать форму барабана?» Ответ Х. А. Лоренца и более поздних авторов можно было бы сформулировать так: «Форму барабана услышать нельзя, а объем, площадь или периметр — можно». Как показал Г. Вейль, число резонансов, не превышающих частоту f , зависит не от формы резонатора, а от его объема:

$$N_3(f) = \frac{4\pi}{3} V \cdot \left(\frac{f}{c}\right)^3, \quad (9.23)$$

где V — объем резонатора, f — частота, c — скорость распространения колебаний, или в двумерном случае — от площади

$$N_2(f) = \pi S \cdot \left(\frac{f}{c}\right)^2, \quad (9.24)$$

где S — площадь резонатора, а f и c имеют такой же смысл, как в (9.23). Сравнивая соотношения (9.23) и (9.24), нетрудно заметить, что они имеют одинаковую структуру

$$N_d(f) = \Pi A \cdot \left(\frac{f}{c}\right)^d, \quad (9.25)$$

где d — евклидова размерность резонатора, Π — числовой коэффициент, A — объем, площадь, периметр или, в зависимости от размерности d , гиперобъем, f — частота, c — скорость распространения колебаний. В закономерность, угаданную в соотношении (9.25), укладывается вычисленная после Вейля поправка к формуле (9.24), учитывающая линейную зависимость по частоте:

$$|\Delta N_2(f)| = \frac{1}{2} p \frac{f}{c}, \quad (9.26)$$

где p — периметр резонатора.

По аналогии с (9.13) Берри высказал гипотезу о том, что в случае фрактальной среды

$$|\Delta N(f)| = \left(L \frac{f}{c}\right)^D, \quad (9.27)$$

где L — характерный линейный размер, D — размерность Хаусдорфа—Безиковича, f — частота и c — скорость распространения колебаний. Но, как ясно из физических соображений и как показали измерения Лapidуса, Флекингера—Пелле, показатель в (9.25) должен быть другим, а именно, определяться размерностью Минковского—Булигана

$$D_{M-B} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log S(\epsilon)}{\log (1/\epsilon)} + 2, \quad (9.28)$$

где $S(\epsilon)$ — площадь (или объем) так называемой «сосиски Минковского» — теоретико-множественной суммы сфер радиуса ϵ , покрывающих весь фрактал.

Моделирование траектории броуновской частицы

Траектория броуновской частицы — типичный пример случайного фрактала. Пусть $X(t_i)$ — последовательные положения броуновской частицы в моменты времени t_i ; $i = 0, 1, 2$; X — случайная величина,

$$E(X) = \mu \quad (9.29)$$

— ее среднее (математическое ожидание). Дисперсия

$$D^2(x) = \sigma^2 = E((x - \mu)^2) = \begin{cases} \sum_k (x_k - \mu)^2 p_k, \\ +\infty \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx. \end{cases} \quad (9.30)$$

Свойства дисперсии:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \sigma^2, \\ D^2(aX + b) &= a^2 \sigma^2, \\ D^2(a_1 X_1 + a_2 X_2) &= a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Соотношение Эйнштейна:

$$D^2(X(t_1) - X(t_2)) = \sigma^2 |t_1 - t_2|, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1. \quad (9.32)$$

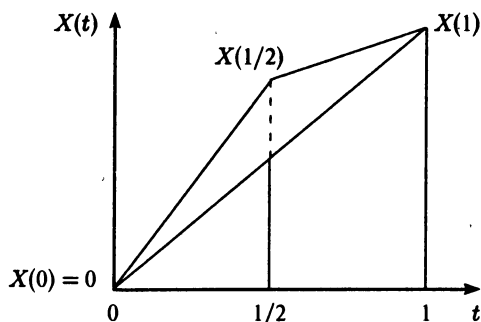


Рис. 56. К моделированию траектории броуновской частицы: нахождение середины звена + случайное смещение

Соотношение Эйнштейна (9.32) обладает высокой устойчивостью: оно выполняется для случайных величин $X(t)$ с распределением, отличающимся от нормального, и в евклидовых пространствах произвольной размерности d .

Пусть $X(0)$ и $X(1)$ — положения броуновской частицы при $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$ (см. рис. 56).

Положение $X(1/2)$ при $t = 1/2$ выберем так, чтобы выполнялось соотношение Эйнштейна (9.32). Для этого сместим середину отрезка $[X(0), X(1)]$ по вертикали на величину D_1 :

$$X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{X(0) + X(1)}{2} + D_1 \quad (9.33)$$

$$D^2 \left[\left(X\left(\frac{1}{2}\right) - X(0) \right) \right] = \delta^2 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\sigma^2}{2}, \quad (9.34)$$

$$\begin{aligned} X\left(\frac{1}{2}\right) - X(0) &= \frac{X(1) + X(0)}{2} - X(0) + D_1 = \\ &= \frac{X(1) - X(0)}{2} + D_1, \end{aligned} \quad (9.35)$$

$$\begin{aligned} D^2 \left[X \left(\frac{1}{2} \right) - X(0) \right] &= D^2 \left[\frac{X(1) - X(0)}{2} \right] + D^2(D_1) = \\ &= \frac{\sigma^2}{4} + \Delta_1^2 = \frac{\sigma^2}{2}, \end{aligned} \quad (9.36)$$

откуда

$$\Delta_1^2 = \frac{\sigma^2}{2}. \quad (9.37)$$

Продолжая ту же процедуру — нахождения середины отрезка и смещения ее по вертикали на такую величину, чтобы выполнялось соотношение Эйнштейна (9.32), получим:

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2^{n+1}} \sigma^2. \quad (9.38)$$

Вопросы и упражнения к лекции 9

1. Задав произвольно набор точек $X(0), X(1), \dots, X(10)$, постройте с помощью описанного в лекции алгоритма «нахождение середины отрезка плюс сдвиг середины», модель траекторий броуновской частицы.
2. Один из способов вычисления размерности Хаусдорфа—Безиковича состоит в наложении на фрактал квадратной сетки (длина стороны квадрата e) и подсчете числа клеток $N(e)$, через которые проходит фрактал («метод квадратов, или клеток»). Пользуясь методом клеток, вычислите размерность Хаусдорфа—Безиковича для модели траектории броуновской частицы, построенной в п. 1.

Лекция 10

Подобие и аффинные преобразования

Преобразование подобия

Преобразование

$$f: x'_i = kx_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.1)$$

или

$$p(A', B') = kp(A, B), \quad (10.2)$$

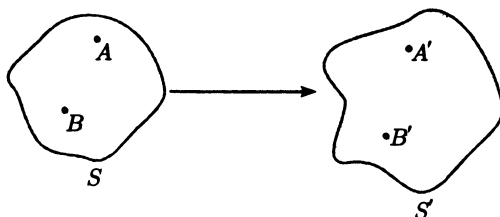


Рис. 57. Преобразование подобия

где A и B — любые две точки пространства, A' и B' — их образы под действием преобразования f (10.1), называется *преобразованием подобия* с коэффициентом подобия k .

При

$$k = 1 \tag{10.3}$$

f — тождественное преобразование.

При

$$k > 1 \tag{10.4}$$

f — растяжение.

При

$$k < 1 \tag{10.5}$$

f — сжатие.

Коэффициент подобия k удобно представить в каноническом виде

$$k = e^\alpha \tag{10.6}$$

(по сравнению с (10.1) канонический вид (10.6) обладает тем преимуществом, что при нулевом значении параметра преобразования α мы получаем тождественное преобразование, а условия (10.3)–(10.5) переходят, соответственно, в условия:

$$\alpha = 0 \tag{10.7}$$

(f — тождественное преобразование),

$$\alpha > 0 \tag{10.8}$$

(f — растяжение),

$$\alpha < 0 \tag{10.9}$$

(f — сжатие).

Важно подчеркнуть, что в случае преобразования подобия коэффициент подобия по всем направлениям один и тот же.

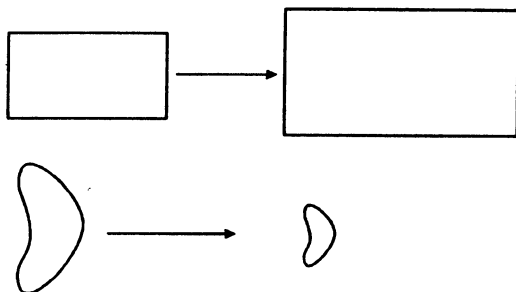


Рис. 58. При преобразовании подобия сохраняется форма, но не размеры фигуры

Преобразование подобия изменяет размеры фигур, но не их форму. Форма — инвариант преобразования подобия.

Аффинные преобразования — преобразования подобия с различными коэффициентами подобия по различным направлениям.

$$x'_i = k_i x_i \quad (10.10)$$

Аффинные преобразования

Преобразование подобия (10.1) — частный случай аффинных преобразований (10.10). Переход от (10.1) к (10.10) — генерализация, или обобщение, переход от (10.10) к (10.1) — специализация, или переход от общего случая к частному.

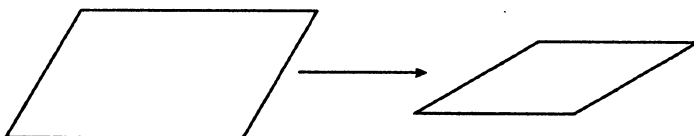


Рис. 59. При аффинном преобразовании не сохраняются ни размер, ни форма фигуры

Что сохраняется при аффинном преобразовании? Аффинное преобразование — линейное — оно переводит прямые в прямые. Ни размеры, ни форма при аффинном преобразовании не сохраняются.

- Аффинные преобразования образуют группу, так как множество объектов, на которые они действуют, замкнуто относительно аффинных преобразований.
- Аффинные преобразования содержат тождественное преобразование, выполняющее роль единичного элемента группы.
- Для каждого аффинного преобразования существует обратное, уничтожающее его действие; последовательное выполнение прямого и обратного аффинных преобразований есть *тождественное* преобразование.
- Последовательное выполнение трех аффинных преобразований $A_1 \circ A_2 \circ A_3$ ассоциативно, т. е.

$$(A_1 \circ A_2) \circ A_3 = A_1 \circ (A_2 \circ A_3) = A_1 \circ A_2 \circ A_3. \quad (10.11)$$

Группа аффинных преобразований коммутативна, или абелева, т. е. для любых двух аффинных преобразований A_1 и A_2 результат их последовательного выполнения не зависит от того, в каком порядке идут «множители»:

$$A_1 \circ A_2 = A_2 \circ A_1. \quad (10.12)$$

Преобразования подобия также образуют группу — подгруппу группы аффинных преобразований.

Преобразования подобия действуют не только в пространстве — на геометрические фигуры, но и на дискретные последовательности, а также на решения дифференциальных уравнений и на сами дифференциальные уравнения. Преобразования подобия лежат также в основе анализа размерности.

Последовательность Морса—Туэ

Не будет преувеличением сказать, что эта последовательность нулей и единиц столь же «всепроникающа и вездесуща», как число π . Еще в 1906 г. норвежский математик Аксель Туэ привел эту последовательность в качестве примера аperiodической рекурсивно вычислимой строки символов, а американский математик Марстон Морс обнаружил ту же последовательность при изучении некоторых нелинейных систем методом символической динамики в 1921 г.

Построение последовательности Морса—Туэ начинается с нуля. На каждом следующем шаге к набору нулей и единиц, уже имеющемуся на предыдущем шаге, справа приписывается его дополнение — набор знаков, в котором каждый ноль заменен единицей, а каждая единица заменена нулем

$$\begin{array}{ll} 1\text{-й шаг} & 0 \\ 2\text{-й шаг} & 01 \\ 3\text{-й шаг} & 0110 \\ 4\text{-й шаг} & 01101001 \\ 5\text{-й шаг} & 0110100110010110 \\ 6\text{-й шаг} & \underline{0}1\underline{1}0\underline{1}0\underline{0}1\underline{1}0\underline{0}1\underline{0}1\underline{0}1\underline{0}0\underline{1}0\underline{1}1\underline{0}0\underline{1}1\underline{0}1\underline{0}0\underline{1} \quad \text{и т. д.} \end{array} \tag{10.13}$$

В пределе мы, следуя принципу «скопируйте предыдущий член последовательности и припишите справа его дополнение», проистекающему из простого правила замены символов

$$0 \rightarrow 01, \quad 1 \rightarrow 10, \tag{10.14}$$

получаем последовательность Морса—Туэ.

Последовательность Морса—Туэ обладает свойством *самоподобия*: содержит фрагменты, которые при надлежащем «растяжении» воспроизводят всю последовательность.

В качестве примера рассмотрим шестой шаг построения последовательности в (10.13). Начав с первого члена, выберем каждый второй член последовательности (они подчеркнуты). Нетрудно заметить, что выбранные члены образуют последовательность Морса—Туэ.

$$0110100110010110. \quad (10.15)$$

Последовательность Морса—Туэ можно получить не только по правилу «скопируйте и припишите справа дополнение», но и следующим образом. Рассмотрим все целые неотрицательные числа (10.16).

Запишем числа (10.16) в двоичной системе и заменим каждое двоичное число остатком от деления суммы его двоичных цифр на 2 (так называемым «цифровым корнем по модулю 2»):

Десятичные числа	0	1	2	3	4	5	6	7	(10.16)
------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---------

Двоичные числа	0	1	10	11	100	101	110	111
----------------	---	---	----	----	-----	-----	-----	-----

Сумма двоичных чисел	0	1	1	2	1	2	2	3
----------------------	---	---	---	---	---	---	---	---

Цифровой корень по модулю 2	0	1	1	0	1	0	0	1	(10.17)
-----------------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---------

Цифровые корни по модулю 2 (10.17) образуют последовательность Морса—Туэ.

Анализ размерности

Физический критерий самоподобия (и самоаффинности) динамической системы: отсутствие в системе естественного масштаба (по которому можно было бы судить, подверглась ли система растяжению или сжатию). Например, геоцентрическая система Птолемея не содержала естественного масштаба длины и поэтому была самоподобна. В гелиоцентрической системе Коперника естественный масштаб длины есть — это расстояние Земля—Солнце, и поэтому система Коперника не обладает самоподобием.

Размерность физической величины принято выражать в определенном классе систем единиц, т. е. предварительно выбрав набор основных единиц. Остальные величины имеют размерности, которые представимы в виде мономонов, т. е. произведений степеней основных единиц:

$$L^\alpha M^\beta T^\gamma. \quad (10.18)$$

Например, в механике удобно использовать класс систем единиц

$$LMT, \quad (10.19)$$

в котором за основные единицы выбраны длина (L), масса (M) и время (T). Частными случаями класса LMT (10.18) служат системы CGS (сантиметр — грамм — секунда), техническая система (метр — тонна — час). Переход от одной системы в данном классе систем единиц к другой системе осуществляется с помощью аффинного преобразования, так как по каждой из основных единиц коэффициент преобразования «свой», отличный от коэффициентов преобразования подобия по другим единицам.

Выбрав класс систем единиц, можно условиться записывать единицы измерения в виде векторов с компонентами из пока-

зателей α, β, γ в (10.18):

$$L^\alpha M^\beta T^\gamma \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma). \quad (10.20)$$

Анализ размерностей позволяет получать соотношения в тех случаях, когда вывод их представляет, казалось бы, неразрешимую задачу (см. приводимый ниже пример 1).

Пример 1. Начнем с весьма элементарного примера — вывода формулы периода математического маятника.

Рассмотрим математический маятник: груз массы m , подвешенный на невесомой нити длиной l . Маятник колеблется в поле силы тяжести (ускорение которой равно g).

Период колебаний маятника T может зависеть от массы m , длины нити l и ускорения силы тяжести g :

$$T \parallel l, m, g. \quad (10.21)$$

В классе систем единиц LMT масса m и длина l имеют размерности основных единиц

$$[m] = (0, 1, 0), \quad (10.22)$$

$$[l] = (1, 0, 0). \quad (10.23)$$

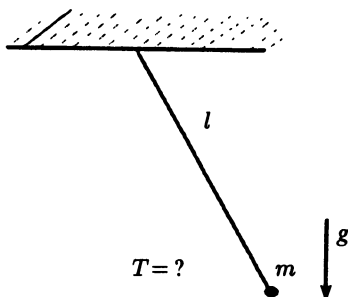


Рис. 60. Математический маятник

Что же касается ускорения g , то его размерность производная от размерностей основных единиц L, M, T

$$[g] = (1, 0, -2). \quad (10.24)$$

Период T имеет размерность

$$[T] = (0, 0, 1). \quad (10.25)$$

Так как векторы (10.22), (10.23) и (10.25) линейно независимы (величины L, M и T размерно независимы), в какой бы степени

ни входили m и l в соотношение для T , получить вектор с ненулевой третьей компонентой все равно не удастся. Вместе с тем необходимо убрать отличные от нуля компоненты векторов (10.22) и (10.23). Так как векторы (10.22) и (10.23) линейно независимы, и вторая компонента вектора размерности $[T]$ равна нулю, вектор (10.22) должен входить в линейную комбинацию, дающую вектор (10.25) с нулевым коэффициентом (период не зависит от массы), а векторы (10.23) и (10.24) — с коэффициентами, равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку. Нетрудно видеть, что

$$[T] = \frac{1}{2}([l] - [g]), \quad (10.26)$$

или

$$T \sim \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (10.27)$$

Точная формула отличается от соотношения (10.27) только числовым коэффициентом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (10.28)$$

Пример 2. Не следует думать, будто анализ размерностей применим лишь для решения только таких элементарных задач учебного характера, как задача из примера 1.

Трое исследователей — Бозе, Рауэрт, Бозе — занимались изучением зависимости между перепадом давления Δp между концами трубки, временем истечения τ , объемом сосуда Q для таких жидкостей, как вода, хлороформ, бромформ и ртуть при различных температурах.

Полученные экспериментальные данные представляли собой облака точек — никакой зависимости не просматривалось. Данные Бозе, Рауэрта и Бозе привлекли внимание Теодора фон Кармана, который воспользовался анализом размерности, в частности, П-теоремой, согласно которой безразмерная комбинация одних величин есть функция безразмерных комбинаций других величин, число которых зависит

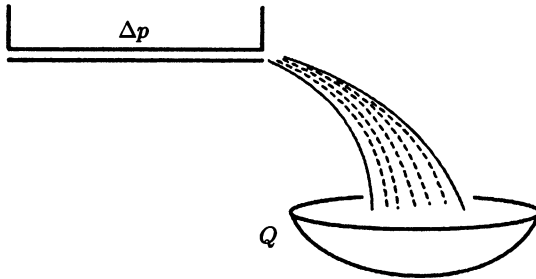


Рис. 61. Эксперимент Бозе, Рауэрта, Бозе

от класса систем единиц и размерностей величин, участвующих в изучаемом явлении.

В эксперименте Бозе, Рауэрта и Бозе требовалось найти зависимость между

$$\Delta p \mid \tau Q \mu, \rho, \quad (10.29)$$

где Δp — перепад давления между концами трубки; τ — время наполнения сосуда объемом Q ; μ — коэффициент вязкости и ρ — плотность жидкости. В классе систем единиц LMT эти величины имеют следующие размерности:

$$[\Delta p] = \frac{M}{LT^2} = (-1, 1, -2),$$

$$[\tau] = T = (0, 0, 1), \quad (10.30)$$

$$[Q] = L^3 = (3, 0, 0),$$

$$[\mu] = \frac{M}{LT} = (-1, 1, -1),$$

$$[\rho] = \frac{M}{L^3} = (-3, 1, 0), \quad (10.31)$$

$$[\Delta p] = [\mu] \cdot [\tau] \cdot [Q]^{-2/3},$$

Лекция 10. Подобие и аффинные преобразования

т. е. существуют две безразмерные комбинации переменных $\Delta p/(\mu\tau^{-1})$ и $\rho/(\mu\tau Q^{2/3})$, между которыми может быть функциональная связь

$$\frac{\Delta p}{\mu\tau^{-1}} = F\left(\frac{\rho}{\mu\tau Q^{2/3}}\right), \quad (10.32)$$

или зависимость переменной $\eta = \Delta p/(\mu\tau^{-1})$ от переменной $\xi = \rho/(\mu\tau Q^{2/3})$ выражается одномерной функцией

$$\eta = F(\xi). \quad (10.33)$$

Экспериментальные точки в системе координат (ξ, η) ложатся на кривую (10.33), что делает зависимость легко проверяемой и наглядной.

Выше мы уже упоминали о том, что геоцентрическая система Птолемея, лишенная естественного масштаба длины (в системе Птолемея рассматривались только угловые расстояния между небесными телами) самоподобна. Аналогичным образом, мы тщетно бы стали искать естественный масштаб длины в классической механике. Ситуация изменилась с появлением в 1900 г. выдвинутой Планком гипотезы квантов, согласно которой энергия могла излучаться и поглощаться малыми, но конечными порциями — квантами:

$$h\nu, \quad (10.34)$$

где $h = 6,626 \cdot 10^{27}$ г · см²/с — знаменитая постоянная Планка.

В 1913 г. Нильс Бор соединил гипотезу Планка с планетарной моделью атома Резерфорда. Простейший атом (водорода), по Бору, представлял собой положительно заряженное массивное ядро и электрон, обращавшийся вокруг ядра по круговой орбите.

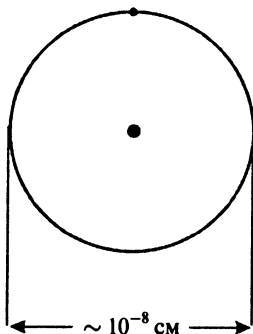


Рис. 62. Атом Бора

В классе систем единиц LMT характеристики атома водорода имели следующие величины и размерности:

$$\begin{aligned}m &= 9,109 \cdot 10^{-28} \text{ г}, \\e &= 4,803 \cdot 10^{-10} \sqrt{\text{г см}^3/\text{с}}, \\h &= 6,626 \cdot 10^{-27} \text{ г см}^2/\text{с},\end{aligned}\tag{10.35}$$

поэтому диаметр атома водорода составлял

$$d = \frac{\pi^2}{2} \frac{h^2}{me^2} = 1,058 \cdot 10^{-8} \text{ см}.\tag{10.36}$$

Он-то и стал естественным масштабом длины, существование которого нарушило самоподобие.

Автомодельные решения

Еще одна важная область, где преобразования подобия, или аффинные преобразования, находят применение — получение важного класса точных аналитических решений дифференциальных уравнений, известных под названием автомодельных решений.

В пространстве решений автомодельные решения служат своего рода аттракторами: на них асимптотически при $t \rightarrow \infty$ или по прошествии конечного времени (так называемая промежуточная асимптотика) «выходят» другие решения. Обычно для нахождения автомодельных решений используется метод С. Ли, о котором пойдет речь в лекции 11: для этого вычисляется базис алгебры Ли, допускаемой данным дифференциальным уравнением, после чего из операторов, образующих этот базис, извлекается (если он есть) инфинитезимальный оператор аффинного преобразования или преобразования подобия. Такой подход излишне «расточителен», так как основной объем

вычислений затрачивается на вычисление других операторов базиса алгебры Ли, не имеющих отношения к нахождению автомодельных решений.

Предлагаемый нами прямой метод нахождения автомодельных решений более экономичен (не требует вычисления «лишних» операторов) и элементарен.

Уравнение теплопроводности (диффузии)

$$u_t = Du_{xx}. \quad (10.37)$$

Подвергнем независимые переменные x, t и искомую функцию u аффинному преобразованию:

$$\begin{aligned} x' &= e^\alpha x, \\ t' &= e^\beta t, \\ u' &= e^\gamma u, \end{aligned} \quad (10.38)$$

где α, β и γ — априори различные (независимые) параметры. Подчеркнем, что аффинное преобразование (10.38) записано в каноническом виде: при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ оно переходит в тождественное преобразование:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ t' &= t, \\ u' &= u. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Для того чтобы уравнение (10.37) оставалось инвариантным при аффинном преобразовании (10.38), числовые коэффициенты, возникающие в результате преобразования в левой и правой частях уравнения, должны совпадать.

Слева «набегает» коэффициент

$$e^{\gamma-\beta}, \quad (10.40)$$

справа —

$$e^{\gamma-2\alpha}. \quad (10.41)$$

Они равны, если равны показатели, т. е. если

$$\gamma - \beta = \gamma - 2\alpha, \quad (10.42)$$

откуда

$$\beta = 2\alpha, \quad (10.43)$$

$$\gamma \text{ — свободный параметр.} \quad (10.44)$$

Свободный параметр γ — следствие линейности уравнения (10.37): неизвестная функция u входит в правую и левую части в первой степени, и поэтому при преобразовании подобия

$$u' = Ku \quad (10.45)$$

с любым коэффициентом K этот коэффициент появляется в правой и левой части одинаково и не зависит от того, как преобразуются независимые переменные x и t .

Что касается независимых переменных, то, поскольку в левую часть входит первая производная по t , а в правую часть — вторая производная по x , возникает соотношение (10.43) или

$$\begin{aligned} t' &= (e^\alpha)^2 t \\ x' &= e^\alpha x. \end{aligned} \quad (10.46)$$

Таким образом,

$$\xi = \frac{x^2}{t} \quad (10.47)$$

— инвариант преобразования подобия, действующего в пространстве независимых переменных уравнения теплопроводности

сти или диффузии (10.37). Приняв ξ (10.47) за новую независимую переменную и подставляя $u(\xi)$ в (10.37), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, решением которого служит автомодельное решение исходного уравнения (10.37).

Уравнение Бюргера

$$u_t + uu_x = u_{xx} \quad (10.48)$$

— одна из первых математических моделей турбулентности, предложенная голландским гидромехаником И. М. Бюргерсом в 1939 г. В отличие от уравнения теплопроводности (10.37) уравнение Бюргера нелинейно (из-за члена uu_x). Аффинное преобразование x, t и u (с пока неизвестными коэффициентами) представимо в каноническом виде:

$$\begin{aligned} x' &= e^\alpha x, \\ t' &= e^\beta t, \\ u' &= e^\gamma u. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Из условия равенства коэффициентов, «набегающих» в результате преобразования (10.49) перед аддитивными членами уравнения (10.48), получаем

$$\gamma - \beta = 2\gamma - \alpha = \gamma - 2\alpha, \quad (10.50)$$

откуда

$$\beta = 2\alpha \quad (10.51)$$

$$\gamma = -\alpha. \quad (10.52)$$

Соотношение (10.52) — следствие нелинейности уравнения Бюргера (10.48): функция u преобразуется согласованным образом с независимыми переменными. Таким образом, аффинное преобразование (10.49) оставляет инвариантным уравнение Бюргера (10.48), если

$$\begin{aligned}x' &= e^\alpha x, \\t' &= (e^\alpha)^2 t, \\u' &= (e^\alpha)^{-1} u.\end{aligned}\tag{10.53}$$

Нетрудно видеть, что инвариантом аффинного преобразования в пространстве независимых переменных x и t служит та же комбинация

$$\xi = \frac{x^2}{t},\tag{10.54}$$

что и в случае уравнения теплопроводности. Разумеется, обыкновенное дифференциальное уравнение для автомодельного решения $u(\xi)$ в случае уравнения Бюргера отличается от уравнения для $u(\xi)$ в случае уравнения теплопроводности.

Уравнение Кортевега—де Фриса

$$u_t + uu_x = u_{xxx}.\tag{10.55}$$

Знаменитое «солитонное» уравнение Кортевега—де Фриса (10.55) было выведено ими в теории мелкой воды, опубликовано в 1895 г. и переоткрыто в 1967 г. Забуски, Крускалом и Миурой при попытке решения «парадокса Ферми—Пасты—Улама». Обманчиво похожее на уравнение Бюргера (10.48) (единственное отличие состоит в том, что в правой части уравнения

Кортевега—де Фриса (10.55) стоит третья производная по x , тогда как в правой части уравнения Бюргерса стоит вторая производная по x), оно вселяло ложные надежды многочисленным исследователям, безуспешно пытавшимся найти по аналогии с уравнением Бюргерса подстановку, позволяющую точно линеаризовать уравнение. Рассмотрим аффинное преобразование

$$\begin{aligned}x' &= e^\alpha x \\t' &= e^\beta t, \\u' &= e^\gamma u,\end{aligned}\tag{10.56}$$

оставляющее инвариантным уравнение Кортевега—де Фриса (10.55). Для этого коэффициенты при аддитивных членах уравнения (10.55) должны совпадать, а это приводит к условиям

$$\gamma - \beta = 2\gamma - \alpha = \gamma - 3\alpha,\tag{10.57}$$

откуда

$$\beta = 3\alpha\tag{10.58}$$

$$\gamma = 2\alpha,\tag{10.59}$$

т. е. аффинное преобразование (10.55) должно иметь вид

$$x' = e^\alpha x,\tag{10.60}$$

$$t' = (e^\alpha)^3 t,\tag{10.61}$$

$$u' = (e^\alpha)^{-2} u.\tag{10.62}$$

Инвариант аффинного преобразования (10.60)–(10.62) в случае уравнения Кортевега—де Фриса имеет вид:

$$\xi = \frac{x^3}{t}.\tag{10.63}$$

Выбрав его за независимую («автомодельную») переменную и подставив $u(\xi)$ в уравнение Кортевега—де Фриса, получим обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого даст автомодельное решение уравнения Кортевега—де Фриса.

Помимо аффинных преобразований и преобразований подобия уравнения могут оставаться инвариантными и относительно других непрерывных преобразований. Их инфинитезимальные операторы образуют алгебру Ли, допускаемую данным уравнением.

Вопросы и упражнения к лекции 10

1. Какие еще фрагменты последовательности Морса—Туэ совпадают со всей последовательностью?
2. Доказать, что преобразование Хопфа—Коула

$$u = -2\delta \frac{\partial}{\partial x} \ln v$$

переводит уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \delta u_{xx}$$

в уравнение диффузии

$$v_t = \delta v_{xx}.$$

3. Найти самоаффинные преобразования, автомодельные переменные и автомодельные решения для модифицированных уравнений Бюргерса и Кортевега—де Фриса (p — натуральное число):

$$u_t + u^p u_x = u_{xx},$$

$$u_t + u^p u_x = u_{xxx}.$$

Лекция 11

Метод Софуса Ли

Ученик Камилла Жордана, норвежский математик Софус Ли распространил идеи Галуа с алгебраических уравнений на дифференциальные и первым приступил к систематическому изучению непрерывных групп преобразований.

С. Ли принадлежит также четкий алгоритм построения базиса алгебры Ли, допускаемой данным дифференциальным уравнением (единичным или системой уравнений, обыкновенных или в частных производных, как линейных, так и нелинейных). Ли доказал также три теоремы, позволяющие свести изучение конечных преобразований, допускаемых данным дифференциальным уравнением или системой дифференциальных уравнений, т. е. преобразований, оставляющих инвариантным вид уравнения или системы уравнений, к изучению главной линейной части таких преобразований — алгебры Ли.

Теория Ли локальна: рассматриваемые в ней преобразования близки к тождественному. При вычислении преобразований, допускаемых данным дифференциальным уравнением или системой дифференциальных уравнений, основное действие разворачивается в касательном пространстве и только в самом конце происходит «спуск на многообразие» — возвращение на многообразие, задаваемое исследуемым уравнением в так на-

зывается продолженным пространством, в котором координатами служат все независимые переменные, неизвестные функции и все (в том числе и не входящие в уравнение) производные от первого до максимального порядка, который встречается в уравнении. Основные преобразования развертываются в пространстве независимых переменных и неизвестных функций, и эти независимые преобразования индуцируют соответствующие преобразования производных.

Инфинитезимальные операторы, возникающие в результате вычислений, образуют алгебру Ли, т. е. множество, наделенное структурой линейного векторного пространства с одной дополнительной операцией, называемой коммутированием.

Коммутированием операторов A и B называется антисимметричная билинейная (т. е. линейная по каждому из операторов) операция (результат коммутации называется коммутатором операторов A и B), такая, что

$$[A, B] = -[B, A], \quad (11.1)$$

причем справедливо тождество Якоби:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \quad (11.2)$$

В частности, под коммутатором операторов A, B можно понимать их комбинацию (произведение операторов означает их последовательное выполнение в указанном порядке; оба оператора действуют «направо»):

$$[A, B] = AB - BA. \quad (11.3)$$

Покажем, что если операцию коммутирования определить с помощью соотношения (11.3), то тождество Якоби (11.2)

выполняется. Действительно,

$$\begin{aligned}
 & [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = \\
 & = [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, AB - BA] = \\
 & = ABC - ACB - BCA + CBA + \\
 & \quad + BCA - BAC - CAB + ACB + \\
 & \quad + CAB - CBA - ABC + BAC = 0.
 \end{aligned} \tag{11.4}$$

Теория продолжения

Пусть имеется исходная система дифференциальных уравнений q -го порядка с m независимыми переменными и k неизвестными функциями. Точка в пространстве независимых переменных и неизвестных функций определяется заданием координат

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k), \tag{11.5}$$

где \mathbf{x}_i ($i = 1, \dots, m$) — независимые переменные, \mathbf{u}_j ($j = 1, \dots, k$) — искомые функции, которые первоначально изменяются произвольно, но при условии, что вид системы

$$L^q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \tag{11.6}$$

где q — максимальный порядок производных, входящих в систему, остается инвариантным.

Конечные преобразования в исходном пространстве (11.5) порождаются инфинитезимальными операторами

$$X = \sum_{i=1}^m \xi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \eta_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_j} \tag{11.7}$$

с (пока) неизвестными функциями $\xi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $\eta_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Первое продолжение

Пусть

$$p_i^j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (11.8)$$

— первые производные от u_j по x_i . Пространством первого продолжения в теории С. Ли называется пространство

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_j; p_i^j), \\ i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Инфинитезимальный оператор преобразования, индуцируемого в продолженном пространстве (11.9) преобразованием в исходном пространстве с инфинитезимальным оператором (11.7), имеет вид

$$\tilde{X} = X + \sum_{i,j} \zeta_i^j(x, u, p) \frac{\partial}{\partial p_i^j}, \quad (11.10)$$

где дополнительная (к X) координата ζ_i^j определяется выражением

$$\zeta_i^j = D_i(\eta_j) - \sum_{s,j} p_s^j D_i(\xi_s), \quad (11.11)$$

а

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_t p_t^i \frac{\partial}{\partial u^t} \quad (11.12)$$

— оператор полного дифференцирования по x_i .

Второе продолжение

Если q — порядок старшей производной, входящей в уравнение (11.6), больше единицы, то исходное пространство (11.5)

необходимо продолжить q раз, с тем чтобы пополнить его производными до q -го порядка включительно.

Пространством второго продолжения в теории С. Ли называется пространство

$$(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k; p_i^j, r_{si}^l), \quad (11.13)$$

где

$$r_{si}^l = \frac{\partial^2 u^l}{\partial x_s \partial x_i} \quad (11.14)$$

— вторая производная от u^l по x_s и x_i ,

$$\begin{aligned} s, i &= 1, 2, \dots, m; \\ l &= 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (11.15)$$

В пространстве (11.13) действуют преобразования, индуцируемые преобразованием в исходном пространстве (11.5) с инфинитезимальным оператором (11.7). Инфинитезимальный оператор преобразования в дважды продолженном пространстве (11.13) имеет вид

$$\tilde{\tilde{X}} = \tilde{X} + \sum_{i,s} \sigma_{is}^l(x, u, p, r) \frac{\partial}{\partial r_{i,s}^l}, \quad (11.16)$$

а дополнительная (по сравнению с оператором \tilde{X}) координата σ_{is}^l определяется выражением

$$\sigma_{is}^l = \tilde{D}_i(\zeta_s^l) - \sum_{i,s} r_{i,s}^l \tilde{D}_i(\xi_s), \quad (11.17)$$

где

$$\tilde{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_q p_i^q \frac{\partial}{\partial u^q} + \sum_{i,s,l} r_{is}^l \frac{\partial}{\partial p_s^l} \quad (11.18)$$

— оператор полного дифференцирования по x_i . Так как в (11.17) оператор \tilde{D}_i во втором члене действует на $\xi_s(x, u)$, а $\xi(x, u)$ не зависит от производных,

$$\tilde{D}_i(\xi_s) \equiv D_i(\xi_s). \quad (11.19)$$

Поэтому окончательно формула (11.17) имеет вид

$$\sigma_{is}^l = \tilde{D}_i(\zeta_s^l) - \sum_{i,s} r_{si}^l D_i^l(\xi_s). \quad (11.20)$$

Структура дальнейших дополнительных координат ясна из структуры (11.20): новый член всегда есть результат действия надлежащим образом продолженного оператора полного дифференцирования по x_i на дополнительный коэффициент инфинитезимального оператора предыдущего продолжения, а второй член есть взятая со знаком минус сумма произведений старшей производной, порядок которой совпадает с порядком достигнутого продолжения, на оператор полного дифференцирования по x_i , действующий на ξ_s .

Пример. Уравнение

$$u'' = 0. \quad (11.21)$$

Исходное пространство

$$(x, u). \quad (11.22)$$

Инфинитезимальный оператор:

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (11.23)$$

Первое продолжение. Производная первого порядка:

$$p = \frac{du}{dx}. \quad (11.24)$$

Пространство первого продолжения:

$$(x, u, p). \quad (11.25)$$

Оператор полного дифференцирования по x :

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u}. \quad (11.26)$$

Дополнительная координата инфинитезимального оператора

$$\tilde{X} = X + \zeta(x, u, p) \frac{\partial}{\partial p} \quad (11.27)$$

первого продолжения

$$\begin{aligned} \zeta(x, u, p) = D(\eta) - pD(\xi) &= \frac{\partial \eta}{\partial x} + p \frac{\partial \eta}{\partial u} - p \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + p \frac{\partial \xi}{\partial u} \right] = \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial x} + p \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - p^2 \frac{\partial \xi}{\partial u}. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Так как $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$ не зависят от p , правая часть уравнения (11.28) — не более чем квадратичный многочлен по p .

Второе продолжение.

$$r = \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (11.29)$$

— вторая производная;

$$(x, u, p, r) \quad (11.30)$$

— пространство второго продолжения,

$$\tilde{\tilde{D}} = D + r \frac{\partial}{\partial p} \quad (11.31)$$

— оператор полного дифференцирования по x , дважды продолженный.

Дополнительная координата инфинитезимального оператора второго продолжения

$$\begin{aligned} \sigma &= \tilde{D}(\zeta) - rD(\xi) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u} + r \frac{\partial}{\partial p} \right) \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} + p \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) - p^2 \frac{\partial \xi}{\partial u} \right] - \\ &\quad - r \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + p \frac{\partial \xi}{\partial u} \right). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Инфинитезимальный оператор второго продолжения

$$\tilde{\tilde{X}} = \tilde{X} + \sigma \frac{\partial}{\partial r}. \quad (11.33)$$

Действуя оператором $\tilde{\tilde{X}}$ на левую часть уравнения (11.21)

$$\tilde{\tilde{X}}r = \sigma|_{r=0} = 0, \quad (11.34)$$

получаем

$$\tilde{X} + \sigma \frac{\partial}{\partial r}(r) = \sigma, \quad (11.35)$$

так как оператор \tilde{X} не содержит оператора дифференцирования по r . Учитывая, что уравнение (11.21) задает в дважды продолженном пространстве (11.30) плоскость $r = 0$, учтем это в уравнении (11.35):

$$\sigma|_{r=0} = 0. \quad (11.36)$$

Эта операция учета взаимосвязи между переменными в силу уравнения называется «спуском на многообразие», так как действие инфинитезимального оператора приводит к сдвигу из точки, лежащей на многообразии, задаваемом в пространстве q -го продолжения уравнением (11.6)

$$L^q(x, u) = 0 \quad (11.37)$$

в касательном пространстве, а учет уравнения (11.37) возвращает нас из касательного пространства на многообразие (11.37).

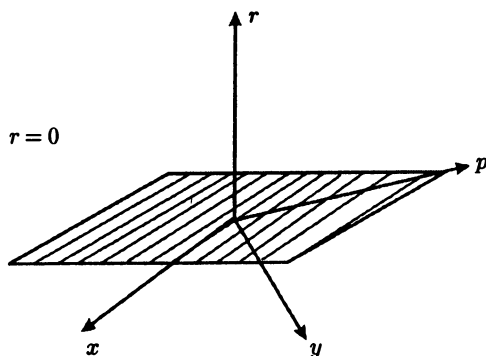


Рис. 63. Уравнение $u'' = 0$ задает плоскость в дважды продолженном пространстве

Итак,

$$\sigma|_{r=0} = 0, \quad (11.38)$$

или

$$\tilde{D}(\zeta) - rD(\xi)|_{r=0} = 0, \quad (11.39)$$

$$\tilde{D}(\zeta) = 0,$$

$$\tilde{D}|_{r=0} = D + r \frac{\partial}{\partial p} |_{r=0} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u}, \quad (11.40)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u} \right) \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + p \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - p^2 \frac{\partial \xi}{\partial u} \right] = 0, \quad (11.41)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} + p \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + \quad (11.42)$$

$$+ p^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} \right) - p^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} - p^3 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0.$$

Члены с ξ и η в (11.42) зависят только от x и u и не зависят от p , поэтому левая часть уравнения (11.42) — не более чем кубический многочлен по p , тождественно равный нулю. Следовательно, его

коэффициенты при различных степенях p равны нулю.

$$\text{при } p^3: \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0; \quad (11.43)$$

$$\text{при } p^2: \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} = 0; \quad (11.44)$$

$$\text{при } p: \quad 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0; \quad (11.45)$$

$$\text{при } p^0: \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (11.46)$$

Из (11.43) следует, что

$$\xi = A(x)u + B(x). \quad (11.47)$$

Из (11.46) заключаем, что

$$\eta = C(u)x + D(u). \quad (11.48)$$

Из (11.44) получаем:

$$C''(u)x + D''(u) = 2A'(x). \quad (11.49)$$

Из (11.45) следует, что

$$A'(x)u + B''(x) = 2C'(u). \quad (11.50)$$

Дифференцируя (11.44) по u , находим:

$$C'''(u)x + D'''(u) = 0. \quad (11.51)$$

Дифференцируя (11.45) по x , приходим к уравнению

$$A'''(x)u + B'''(x) = 0, \quad (11.52)$$

откуда

$$C'''(u) \equiv 0, \quad (11.53)$$

$$D'''(u) \equiv 0, \quad (11.54)$$

$$A'''(x) \equiv 0, \quad (11.55)$$

$$B'''(x) \equiv 0. \quad (11.56)$$

Следовательно,

$$C(u) = c_2 u^2 + c_1 u + c_0, \quad (11.57)$$

$$D(u) = d_2 u^2 + d_1 u + d_0, \quad (11.58)$$

$$A(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (11.59)$$

$$B(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0. \quad (11.60)$$

Подставляя (11.57) и (11.59) в (11.49), получаем:

$$2c_2 + 2d_2 = 2(2a_2 x + a_1). \quad (11.61)$$

Аналогично подставляя (11.59) и (11.57) в (11.50), получаем:

$$2a_2 u + 2b_2 = 2(2c_2 u + c_1). \quad (11.62)$$

Из (11.61) следует, что

$$2c_2 = 4a_2, \quad \text{или} \quad c_2 = 2a_2. \quad (11.63)$$

Из (11.62) мы заключаем, что

$$2a_2 = 4c_2, \quad \text{или} \quad c_2 = \frac{a_2}{2}, \quad (11.64)$$

$$c_1 = b_2. \quad (11.65)$$

Сравнивая (11.63) и (11.64), мы видим, что

$$a_2 = c_2 = 0. \quad (11.66)$$

Следовательно, соотношения (11.57)–(11.60) с учетом (11.66) выглядят так:

$$A(x) = a_1x + a_0, \quad (11.67)$$

$$B(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0, \quad (11.68)$$

$$C(u) = b_2u + c_0, \quad (11.69)$$

$$D(u) = a_1u^2 + d_1u + d_0, \quad (11.70)$$

где коэффициенты — свободные независимые константы.

Инфинитезимальный оператор в пространстве, независимой переменной x и неизвестной функции u имеет вид

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u}, \quad (11.71)$$

$$\xi = (a_1x + a_0)u + b_2x^2 + b_1x + b_0, \quad (11.72)$$

$$\eta = (b_2u + c_0)x + a_1u^2 + d_1u + d_0. \quad (11.73)$$

Полагая каждый из коэффициентов равным единице, а остальные равными нулю, получаем базисные операторы алгебры Ли, допускаемой уравнением (11.21):

$$\begin{matrix} a_1 \\ xu \frac{\partial}{\partial x} + u^2 \frac{\partial}{\partial u}, \end{matrix} \quad (11.74)$$

$$\begin{matrix} b_2 \\ x^2 \frac{\partial}{\partial x} + ux \frac{\partial}{\partial u}, \end{matrix} \quad (11.75)$$

$$\begin{matrix} a_0 \\ u \frac{\partial}{\partial x}, \end{matrix} \quad (11.76)$$

$$\begin{matrix} c_0 \\ x \frac{\partial}{\partial u}, \end{matrix} \quad (11.77)$$

$$\begin{matrix} b_1 \\ x \frac{\partial}{\partial x}, \end{matrix} \quad (11.78)$$

$$\begin{matrix} d_1 \\ u \frac{\partial}{\partial u}, \end{matrix} \quad (11.79)$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{b}_0 & \mathbf{d}_0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, & (11.80) \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}, & (11.81) \end{array}$$

Переход от операторов в левом столбце к операторам в правом столбце осуществляется при замене

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x}. \quad (11.82)$$

Четное число (и однотипность) операторов связана с тем, что уравнение (11.21) описывает равномерное прямолинейное движение, при котором расстояние можно измерять по часам, а время — по верстовым столбам. Инфинитезимальные операторы соответствуют следующим конечным преобразованиям: оператор (11.80) — сдвигу по \mathbf{x} (так как \mathbf{x} в уравнении (11.5) означает временную координату, сдвиг по \mathbf{x} соответствует однородности времени — отсутствию выделенного момента времени), оператор (11.81) — сдвигу по \mathbf{u} (переменная \mathbf{u} в уравнении (11.5) имеет смысл пространственной переменной, сдвиг по \mathbf{u} соответствует однородности пространства — отсутствию в нем выделенной точки), оператор (11.78) — преобразованию подобия по шкале времени, оператор (11.79) — преобразованию подобия пространства, операторы (11.76) и (11.77) — галилеевым сдвигам и, наконец, операторы (11.74) и (11.75) — преобразования инверсии, переставляющие местами точки M_1 и M_2 , лежащие на прямых, проходящих через начало координат на плоскости (\mathbf{x}, \mathbf{u}) , так, что

$$OM_1 \cdot OM_2 = 1. \quad (11.83)$$

Вопросы и упражнения к лекции 11

1. Показать, что решения любого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка спрямляемы, т. е. с помощью подходящей замены переменных уравнение может быть приведено к виду (11.5), если допускаемая уравнением алгебра Ли восьмимерна.

2. Вычислить алгебру Ли, допускаемую уравнением

$$u'' + u = 0.$$

3. Вычислить алгебру Ли, допускаемую уравнением Бюргерса

$$u_t + uu_x = u_{xx}.$$

4. Вычислить алгебру Ли, допускаемую уравнением Кортевега—де Фриса

$$u_t + uu_x = u_{xxx}.$$

Лекция 12

Метод Софуса Ли (продолжение)

В лекции 11 мы с помощью предложенного Софусом Ли алгоритма вычислили базис алгебры Ли, допускаемой уравнением равномерного прямолинейного движения

$$u'' = 0. \quad (12.1)$$

Как показано в лекции 11, базис алгебры Ли уравнения (12.1) состоит из восьми операторов:

$$X_1 = xu \frac{\partial}{\partial x} + u^2 \frac{\partial}{\partial u}, \quad (12.2)$$

$$X_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + ux \frac{\partial}{\partial u}, \quad (12.3)$$

$$X_3 = u \frac{\partial}{\partial x}, \quad (12.4)$$

$$X_4 = x \frac{\partial}{\partial u}, \quad (12.5)$$

$$X_5 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad (12.6)$$

$$X_6 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (12.7)$$

$$X_7 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (12.8)$$

$$X_8 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad (12.9)$$

Множество M операторов с базисом (12.2)–(12.9) наделено структурой линейного векторного пространства, т. е. вместе с любыми операторами $Y_1, Y_2 \in M$, множеству M принадлежит и их линейная комбинация

$$\alpha Y_1 + \beta Y_2,$$

где α и β — произвольные константы.

Вычисляя коммутаторы базисных операторов, мы убеждаемся в том, что множество операторов, допускаемых уравнением (12.1), замкнуто относительно операции коммутирования, т. е. представляет собой алгебру Ли.

Инфинитезимальные операторы обладают следующей структурой:

$$Y = \boxed{A} \frac{\partial}{\partial x} + \boxed{B} \frac{\partial}{\partial u}. \quad (12.10)$$

Если

$$x' = f(x, u, \alpha) \quad (12.11)$$

$$u' = \varphi(x, u, \beta) \quad (12.12)$$

— конечные преобразования, записанные в каноническом виде, т. е.

$$x' = f(x, u, \alpha) = x, \quad (12.13)$$

$$u' = \varphi(x, u, \beta) = u, \quad (12.14)$$

то

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad (12.15)$$

$$B = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right|_{\beta=0}. \quad (12.16)$$

Например, если непрерывное преобразование — вращение, то его

Неканоническая форма

$$x' = \beta x - \sqrt{1 - \beta^2} u, \quad (12.17)$$

$$y' = \sqrt{1 - \beta^2} x + \beta u, \quad (12.18)$$

$$\beta = \sin \alpha. \quad (12.19)$$

Каноническая форма

$$x' = \cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot u, \quad (12.20)$$

$$u' = \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot u. \quad (12.21)$$

При $\alpha = 0$ — тождественное преобразование

$$x' = x, \quad (12.22)$$

$$u' = u. \quad (12.23)$$

$$\left. \frac{\partial x'}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\sin \alpha \cdot x - \cos \alpha \cdot u \Big|_{\alpha=0} = -u; \quad (12.24)$$

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot u \Big|_{\alpha=0} = x. \quad (12.25)$$

Инфинитезимальный оператор

$$Y = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}. \quad (12.26)$$

Нетрудно проверить, что и в неканонической форме (12.17), (12.18), и в канонической форме (12.20), (12.21) матрицы преобразования ортогональны, а $\det = 1$.

Скалярные квадраты векторов-строк в неканонической форме (12.17), (12.18):

$$\begin{aligned} \beta^2 + (1 - \beta^2) &= 1, \\ 1 - \beta^2 + \beta^2 &= 1. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Скалярное произведение векторов-строк

$$\beta \sqrt{1 - \beta^2} - \sqrt{1 - \beta^2} \cdot \beta = 0. \quad (12.28)$$

Скалярные квадраты векторов строк в канонической форме (12.20), (12.21):

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad (12.29)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (12.30)$$

Скалярное произведение векторов-строк:

$$\cos \alpha \cdot \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0. \quad (12.31)$$

$$\det \begin{pmatrix} \beta & -\sqrt{1 - \beta^2} \\ \sqrt{1 - \beta^2} & \beta \end{pmatrix} = \beta^2 - (-\sqrt{1 - \beta^2}^2) = 1. \quad (12.32)$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \cos^2 \alpha - (-\sin \alpha) \sin \alpha = 1. \quad (12.33)$$

Нетрудно видеть, что $x^2 + y^2$ — инвариант вращения:

$$\begin{aligned} (x')^2 + (u')^2 &= (\beta x - \sqrt{1 - \beta^2} u)^2 + \\ &\quad + (\sqrt{1 - \beta^2} x + \beta u)^2 = \\ &= \beta^2 x^2 - 2\beta\sqrt{1 - \beta^2} x u + (1 - \beta^2) u^2 + \\ &\quad + (1 - \beta^2) x^2 + 2\beta\sqrt{1 - \beta^2} x u + \beta^2 u^2 = \\ &= x^2 + u^2. \end{aligned} \quad (12.34)$$

$$\begin{aligned} (x')^2 + (u')^2 &= (\cos \alpha x - \sin \alpha u)^2 + (\sin \alpha x + \cos \alpha u)^2 = \\ &= x^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + u^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= x^2 + u^2. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Инвариант f преобразования, порождаемого инфинитезимальным оператором Y , есть решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка:

$$Yf = 0. \quad (12.36)$$

В случае вращения $Y = -u(\partial/\partial x) + x(\partial/\partial u)$ (см. (12.26))

$$f = x^2 + u^2, \quad (12.37)$$

поэтому

$$\left(-u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}\right)(x^2 + u^2) = -u \cdot 2x + x \cdot 2u = 0. \quad (12.38)$$

Зная инфинитезимальный оператор, например

$$Ax \frac{\partial}{\partial x} + By \frac{\partial}{\partial y}, \quad (12.39)$$

инвариант преобразования можно найти, решая сопряженную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{Ax} = \frac{dy}{By} \quad (12.40)$$

$$\frac{1}{A} \ln x = \frac{1}{B} \ln y, \quad (12.41)$$

или

$$\ln \frac{x^A}{y^B} = 0. \quad (12.42)$$

$$\frac{y^B}{x^A} \quad (12.43)$$

— инвариант аффинного преобразования

$$x' = e^{A\alpha} x, \quad (12.44)$$

$$y' = e^{B\alpha} y. \quad (12.45)$$

Алгебру Ли, допускаемую дифференциальным уравнением (или системой дифференциальных уравнений) можно использовать и для нахождения более простых уравнений, решения которых удовлетворяют данному уравнению (такие уравнения естественно назвать поставщиками или «донорами решений» по отношению к данному уравнению).

Как найти для данного нелинейного уравнения «донор решений»?

Обратимся к преобразованию Хопфа—Коула

$$u = -2\delta \frac{\partial}{\partial x} \ln v, \quad (12.46)$$

переводящему нелинейное уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = u_{xx} \quad (12.47)$$

в линейное уравнение теплопроводности

$$v_t = \delta v_{xx}. \quad (12.48)$$

Как преобразование (12.46) было найдено Эбергардом Хопфом, из его публикации не ясно: Хопф просто констатирует, что такое преобразование существует. Джулиус Коул нашел преобразование из групповых соображений. Покажем, что метод Ли позволяет искать и находить уравнения, служащие «донорами» или «поставщиками решений» для других уравнений. Прежде всего, пользуясь алгоритмом С. Ли, вычислим базис алгебры Ли, допускаемой уравнением Бюргерса (12.47) и уравнением теплопроводности (12.48).

Для уравнения Бюргерса:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (12.49)$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (12.50)$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} - \boxed{u \frac{\partial}{\partial u}}, \quad (12.51)$$

$$X_4 = t \frac{\partial}{\partial x} + \boxed{\frac{\partial}{\partial u}}, \quad (12.52)$$

$$X_5 = tx \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} + \boxed{(x - tu) \frac{\partial}{\partial u}}, \quad (12.53)$$

где X_1 и X_2 порождают сдвиги по t и u ; X_3 — аффинное преобразование

$$\begin{aligned}x' &= e^\alpha x, \\t' &= (e^\alpha)^2 t, \\u' &= (e^\alpha)^{-1} u,\end{aligned}\tag{12.54}$$

X_4 — галилеев перенос и X_5 — инверсию.

Алгебра Ли для уравнения Бюргерса конечномерна (5-мерна). Это сразу же заставляет отказаться от надежды на то, что алгебры Ли уравнений (12.47) и (12.48) изоморфны: алгебра Ли линейного уравнения теплопроводности (12.48) бесконечномерна, так как для уравнения (12.48) выполняется принцип суперпозиции, в частности, сумма данного решения и любого другого решения также удовлетворяет уравнению (12.48).

Для уравнения теплопроводности базис допускаемой алгебры Ли состоит из операторов:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x},\tag{12.55}$$

$$Y_2 = \frac{\partial}{\partial t},\tag{12.56}$$

$$Y_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t},\tag{12.57}$$

$$Y_4 = t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial v},\tag{12.58}$$

$$Y_5 = tx \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)v \frac{\partial}{\partial v},\tag{12.59}$$

$$Y_6 = v \frac{\partial}{\partial v},\tag{12.60}$$

$$Y_7 = v^* \frac{\partial}{\partial v}. \quad (12.61)$$

Сравнивая базисные операторы X_i с базисными операторами Y_s , нетрудно заметить как сходство, так различия: операторы отличаются членами, заключенными в штриховые рамки и затрагивающими неизвестные функции u и v . Что же касается структуры остальных членов базисных уравнений, то она у уравнений Бюргерса и теплопроводности одинакова: X_1, X_2, Y_1, Y_2 порождают сдвиги, X_3, Y_3 — аффинные преобразования, X_4, Y_4 — галилеевы сдвиги, X_5, Y_5 — инверсию.

Таким образом, «осколки» базисных операторов X_i и Y_s , возникающие при «спуске в пространство независимых переменных», у уравнений Бюргерса и теплопроводности одинаковы. Это наводит на мысль об алгоритме поиска «донора» решений для данного нелинейного уравнения

$$L(x, u) = 0. \quad (12.62)$$

1. Вычисляем базис алгебры Ли, допускаемой уравнением (12.62) — $X_i, i = 1, \dots, n$.
2. Отбрасывая у базисных операторов X_i те члены, которые содержат неизвестные функции, производим спуск в пространство независимых переменных — находим операторы X_i .
3. Операторы X_i , вообще говоря, не образуют базиса алгебры Ли. Достроим их, приписывая вместо отброшенных членов члены с неопределенными коэффициентами, содержащими x, t и неизвестные функции — $\varphi(x, t, u)$, с таким расчетом, чтобы коммутаторы достроенных операторов X_i были замкнуты относительно операции коммутирования,

т. е. чтобы при любых i и s

$$[X_i, X_s] = \sum_j C_{is}^j X_j. \quad (12.63)$$

4. После этого, задавая дифференциальное уравнение требуемого типа (не обязательно линейное, оно может быть и известным (решаемым) нелинейным уравнением) выясним, существует ли среди таких уравнений такое, что его левая часть —

$$M(x, v) \quad (12.64)$$

служит инвариантом построенных операторов X_i . Тогда существует преобразование $u = F(v)$, переводящее уравнение

$$M(x, v) = 0 \quad (12.65)$$

в исходное уравнение (12.62).

Мы видим, что метод Софуса Ли вполне алгоритмичен и позволяет отвечать на многие вопросы, связанные с групповыми свойствами дифференциальных уравнений, как отдельных, так и систем: находить преобразования, оставляющие данное уравнение или данную систему инвариантной, находить уравнения-«доноры» и частично инвариантные решения (инвариантные относительно каких-то преобразований, допускаемых уравнениями) и т. д. Метод С. Ли — мощный инструмент исследования нелинейных уравнений, позволяющий находить их точные аналитические решения.

Эргодичность и перемешивание

Представим себе, что мы рассматриваем дискретное отображение со сложным поведением образов исходной точки x_0 .

Если образы ведут себя так, что их среднее по времени

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f^t(x_0) dt \quad (12.66)$$

совпадает со средним по пространству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \quad (12.67)$$

(предполагается, что пределы в (12.66) и (12.67) существуют), то такое отображение называется *эргодическим*.

Пример. Предположим, что частица движется по квадратному бильярду, упруго отражаясь от стенок по закону «угол падения равен углу отражения», причем начальное звено траектории образует со стороной квадрата угол α с иррациональным тангенсом:

$$\operatorname{tg} \alpha \neq \frac{m}{n}. \quad (12.68)$$

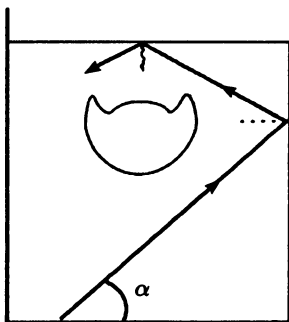


Рис. 64. Квадратный бильярд

Тогда отрезки траектории со временем покроют весь квадрат, и среднее время пребывания частицы на «портрете кошки» (12.66) совпадет с отношением площади портрета к площади квадрата (12.67), что и означает эргодичность этой системы.

Другим примером эргодической системы может служить двумерное отображение «кошка Арнольда»

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \end{aligned} \quad (12.69)$$

все неподвижные точки которого гиперболичны, так как собственные значения матрицы преобразования (12.69)

$$\det(T - \lambda E) = 0, \quad (12.70)$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (12.71)$$

равны

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad (12.72)$$

т. е. действительны и взаимно обратны.

Эргодичность — важное свойство сложных (хаотических) режимов, состоящее в равенстве средних по времени и по фазовому пространству.

Иногда эргодичность (ошибочно) путают с понятием перемешивания. Отображение f называется перемешивающим, если равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho[f^{(n)}(A) \cap B] = \rho(A)\rho(B) \quad (12.73)$$

выполняется для любой пары измеримых множеств A и B . Здесь ρ — инвариантная плотность отображения f , n — номер итерации

$$\rho(A) = \int_A \rho(x) dx. \quad (12.74)$$

Определение перемешивающего отображения (12.73) имеет простой смысл: отображение f называется перемешивающим, если при добавлении в сосуд с единичным объемом жидкости объема A некоторой другой жидкости (чернил или краски)

после сильного перемешивания количество примеси в объеме B было равно произведению плотности размешанной краски на долю, которую объем B составляет от всего объема первоначальной жидкости.

Как показывает следующий пример — отображение

$$x_{n+1} = x_n + b \pmod{1} \equiv f(x_n), \quad (12.75)$$

которое сдвигает точку x_0 на расстояние 1 вдоль единичной окружности. Если величина b иррациональна, то какой бы ни была начальная точка x_0 , ее образы со временем равномерно покроют всю окружность.

Что же касается пересечения области $f^{(n)}(A)$ с областью B , то оно либо пусто, либо равно некоторой отличной от нуля величине и не имеет предельного значения, как это должно было бы быть по определению (12.73).

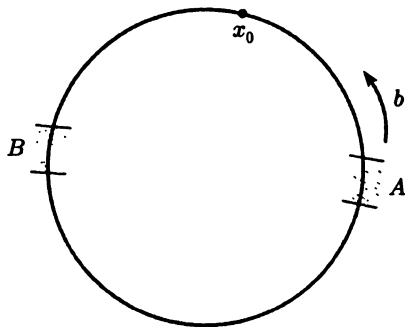


Рис. 65. Эргодичность не означает перемешивание

Отображение «кошка Арнольда» — типичная система с перемешиванием: заданный элемент фазового пространства со временем истончается, расплываясь все больше и покрывая все фазовое пространство.

Вопросы и упражнения к лекции 12

1. Вычислить алгебру Ли, допускаемую уравнением Тьюринга

$$u_t = u_{xx} + f(u),$$

где $f(u)$ — нелинейная функция от u («источник»). При каких $f(u)$ алгебра Ли, допускаемая уравнением Тьюринга, расширяется по сравнению с общим случаем?

2. Вычислив базис алгебры Ли, допускаемой уравнением Кортевега—де Фриса:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \end{cases} \quad \text{— сдвиги,}$$

$$X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 3t \frac{\partial}{\partial t} - 2u \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{— аффинные преобразования,}$$

$$X_4 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{— галилеев перенос,}$$

показать, что солитон — решение, инвариантное относительно линейной комбинации двух операторов из базиса.

3. Показать, что для уравнения Кортевега—де Фриса не существует преобразования, аналогичного преобразованию Хопфа—Коула для уравнения Бюргерса, переводящего это нелинейное уравнение в линейное уравнение теплопроводности.

Лекция 13

СОЛИТОНЫ

Изложенный в предыдущих лекциях метод группового анализа дифференциальных уравнений Софуса Ли применим к любым уравнениям, как одиночным, так и к системам, и позволяет находить так называемые частично инвариантные решения, т. е. решения, инвариантные относительно части преобразований, допускаемых уравнением.

Учитывая, что получить аналитически точное решение нелинейного уравнения удастся лишь в исключительных случаях, а также алгоритмическую четкость этапов метода Ли, его применение оказывается весьма полезным при решении задач нелинейной физики.

Класс точно решаемых уравнений — математических моделей нелинейной физики — удалось существенно расширить в конце 1970-х гг. с появлением метода обратной задачи теории рассеяния. Следуя этому методу, необходимо выполнить следующие операции:

- а) отобразить начальные данные $u(x, 0)$ в так называемые данные рассеяния

$$S = \{b(k, 0), c_n(0) \text{ и } \lambda_n, n = 1, 2, \dots, N\}; \quad (13.1)$$

- б) вычислить, как изменяются со временем данные рассеяния;
- в) решив уравнение Гельфанда—Левитана, найти

$$u(x, f). \tag{13.2}$$

Метод обратной задачи теории рассеяния позволил решить уравнение Кортевега—де Фриса и оказался применимым ко всем так называемым эволюционным уравнениям

$$u_t = K[u], \tag{13.3}$$

где $K[u]$ — некоторый нелинейный функционал от u . Впервые метод обратной задачи теории рассеяния был открыт в 1967 г. Ч. С. Гарднером, Дж. М. Грином, М. Д. Крускалом и Р. М. Миурой, которые, в частности, нашли солитонные решения уравнения Кортевега—де Фриса, а уравнение Кортевега—де Фриса, впервые выведенное Кортевегом и де Фрисом в 1895 г., было в 1965 г. переоткрыто Забуски и Крускалом при объяснении парадокса Ферми—Пасты—Улама. Этот парадокс заключается в нерасплывании возмущения в цепочке нелинейных осцилляторов с возвращающей силой, пропорционально квадрату сжатия пружины

$$f = -kx^2. \tag{13.4}$$

После работ Римана и Коши—Фурье эти два открытия по своей значимости считаются наиболее значительными достижениями в теории нелинейных волн.

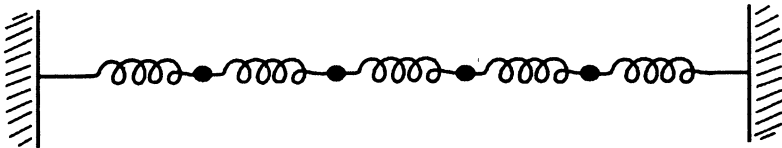


Рис. 66. Парадокс Ферми—Пасты—Улама

Теоретической работе голландцев Кортевега (учителя) и де Фриса (ученика) (публикация 1895 г. была главой из диссертации де Фриса, выполненной под руководством Кортевега) предшествовало наблюдение знаменитого викторианского инженера и предпринимателя Джона Скотта Рассела (1808–1882), сделанного при изучении пропускной способности канала Юнион, проходящего между двумя каналами, соединяющими оба побережья Шотландии, для определения эффективности парового судоходства по каналу Юнион.

Трудно удержаться от искушения и не привести следующий отрывок из отчета Джона Скотта Рассела:

Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась; вместо этого она собралась около носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, т. е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, нисколько не меняя своей формы и не снижая своей скорости. Я последовал за ним верхом, и, когда я нагнал его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около тридцати футов и высотой от фута до фута с половиной. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так, в августе 1834 г. мне впервые довелось столкнуться с необычайным и красивым явлением, которое я назвал волной трансляции; теперь это название общепринято.

С тех пор я обнаружил, что такие волны играют важную роль почти во всех случаях, когда жидкость оказывает сопротивление движению, и пришел к убеждению, что к то-

му же типу относятся огромные движущиеся повышения уровня моря, которые с регулярностью обращения небесного тела входят в наши реки и катятся вдоль наших побережий.

Для подробного изучения этого явления с целью точно установить его природу и управляющие им законы я придумал другие, более удобные способы его вызвать, чем только что описанный, и применял разнообразные методы наблюдения. Описание этих методов, надеюсь, поможет мне передать истинное представление о природе этой волны.

Впоследствии Рассел назвал волну, которую наблюдал в августе 1834 г., «большой уединенной волной». В современной терминологии эту волну назвали бы солитоном (вслед за Забуски и Крускалом).

Своим названием метод обратной задачи теории рассеяния обязан неожиданной взаимосвязи, обнаруженной между решением задачи Коши для уравнения Кортевега—де Фриса и квантово-механической задачей на собственные значения для уравнения Шрёдингера с потенциалом, удовлетворяющим уравнению Кортевега—де Фриса. В квантовой механике прямой задачей рассеяния называется решение задачи на собственные значения уравнения Шрёдингера с известным потенциалом, обратной — восстановление неизвестного потенциала по так называемым данным рассеяния.

Данные рассеяния

Данные рассеяния представляют собой следующее. Пусть

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u(x, t)\psi = \lambda\psi \quad (13.5)$$

— уравнение Шрёдингера с потенциалом $u(x, t)$, удовлетворяющим уравнению Кортевега—де Фриса

$$u_t + uu_x = u_{xxx}. \quad (13.6)$$

При $t = 0$ решение $u(x, t)$ совпадает с заданной на всей оси функцией $f(x)$ (данными Коши), свойства которой обеспечивают разрешимость задачи (13.6):

$$u(x, 0) \equiv f(x). \quad (13.7)$$

Оператор Штурма—Лиувилля

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t) \quad (13.8)$$

имеет не более чем конечное число дискретных собственных значений

$$\lambda = -\kappa^2,$$

которые все отрицательны и невырождены. Соответствующие собственные функции ψ_n с нормировкой

$$\psi_n \rightarrow e^{-\kappa_n x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (13.9)$$

вещественны и

$$\psi_n \rightarrow c_n e^{\kappa_n x}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (13.10)$$

Кроме того, оператор L (13.8) обладает непрерывным спектром

$$\lambda = k^2, \quad (13.11)$$

заполняющим полюсь

$$0 < \lambda < \infty. \quad (13.12)$$

Собственные функции ψ_n непрерывного спектра определяются нормировкой

$$\begin{aligned} \psi(x, k) &\rightarrow e^{ikx}, \\ x &\rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (13.13)$$

и дважды вырождены: каждому $\lambda = k^2$, кроме $\psi(x, k)$ соответствует также комплексно-сопряженная функция $\psi^*(x, k)$. При $x \rightarrow -\infty$ собственные функции непрерывного спектра имеют асимптотику

$$\psi(x, k) \rightarrow a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx}. \quad (13.14)$$

Величины

$$\lambda_n, c_n, a(k), b(k) \quad (13.15)$$

называются данными рассеяния для оператора Штурма—Лиувилля (13.8).

Заметим, что время t входит в (13.8) как параметр. Если $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега—де Фриса (13.6), то данные рассеяния для оператора L (13.8) изменяются по времени достаточно просто, что позволяет, решив прямую задачу рассеяния, найти данные рассеяния

$$\lambda_n, c_n(0), a(k, 0), b(k, 0). \quad (13.16)$$

Разрешив уравнение (13.5) относительно u и подставив полученное выражение в уравнение Кортевега—де Фриса (13.6), получим зависимость данных рассеяния от времени:

$$\lambda_n, c_n(t), a(k, t), b(k, t). \quad (13.17)$$

Наконец, подставив данные рассеяния (13.17) в интегральное уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_x^{+\infty} B(y + z)K(x, z) dz = 0, \quad (13.18)$$

где

$$B(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 e^{-x_n \zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b(k) e^{ik\zeta} d\zeta, \quad (13.19)$$

и решив его, найдем функцию

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t), \quad (13.20)$$

удовлетворяющую уравнению Кортевега—де Фриса (13.6) с начальным условием (13.7).

Первоначально метод обратной задачи теории рассеяния воспринимался как своего рода курьез, или искусственный прием, для решения узкой частной задачи, но постепенно он превратился в один из наиболее эффективных методов современной математической физики. В частности, он оказался полезным при решении двумерного аналога уравнения Кортевега—де Фриса (13.6) — уравнения Кадомцева—Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \pm \Delta_{\perp} u, \quad (13.21)$$

где

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (13.22)$$

нелинейного уравнения Шрёдингера

$$i u_t + u_{xx} + 2u|u|^2 = 0, \quad (13.23)$$

уравнения sine-Gordon

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u, \quad (13.24)$$

уравнения sh-Gordon

$$u_{xx} - u_{tt} = \operatorname{sh} u \quad (13.25)$$

и многих других эволюционных уравнений, возникающих в различных физических задачах.

Найденные с помощью метода обратной задачи теории рассеяния солитонные и солитоноподобные решения нелинейных эволюционных уравнений привлекли внимание физиков и математиков своими необычными свойствами. За солитонами началась настоящая «охота». Покажем, что метод С. Ли оказывается полезным и при поиске солитонных решений.

Пусть

$$L(x, u) = 0 \quad (13.26)$$

— исследуемое (на предмет обнаружения солитонных решений) уравнение,

$$x' = f_1(x, u, \alpha), \quad (13.27)$$

$$u' = f_2(x, u, \alpha), \quad (13.28)$$

записанные в каноническом виде:

$$x' = f_1(x, u, 0) = x \quad (13.29)$$

$$u' = f_2(x, u, 0) = u, \quad (13.30)$$

— преобразования, допускаемые уравнением (13.26), т. е. оставляющие его инвариантным при $\alpha \neq 0$.

Функции f_1 и f_2 можно найти, подставляя (13.27) и (13.28) в уравнение (13.26) и полагая параметр α бесконечно малым. Например, в случае уравнения Кортевега—де Фриса функции f_1 и f_2 порождают суперпозицию преобразований четырех типов:

1) сдвиг по времени:

$$\begin{aligned}x' &= x, \\t' &= t + \alpha, \\u' &= u;\end{aligned}\tag{13.31}$$

2) сдвиг по пространственной переменной:

$$\begin{aligned}x' &= x + \alpha, \\t' &= t, \\u' &= u;\end{aligned}\tag{13.32}$$

3) галилеев перенос:

$$\begin{aligned}t' &= t, \\x' &= x + \alpha t, \\u' &= u;\end{aligned}\tag{13.33}$$

4) аффинное преобразование:

$$\begin{aligned}t' &= \alpha^3 t, \\x' &= \alpha x, \\u' &= \alpha^{-2} u.\end{aligned}\tag{13.34}$$

Каждое из этих четырех преобразований порождается своим инфинитезимальным оператором:

— сдвиг по времени — оператором

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}; \quad (13.35)$$

— сдвиг по пространственной переменной — оператором

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad (13.36)$$

— галилеев перенос — оператором

$$X_3 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}; \quad (13.37)$$

— аффинное преобразование — оператором

$$X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 3t \frac{\partial}{\partial t} - 2u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (13.38)$$

Выбирая любую линейную комбинацию Y операторов X_1 – X_4 и находя решение линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$Yf = 0, \quad (13.39)$$

получаем решение уравнения Кортевега—де Фриса, инвариантное относительно соответствующей комбинации преобразований. Например, сдвиг по времени порождает кноидальный солитон уравнения Кортевега—де Фриса, преобразование подобия — автомодельное решение, а комбинация сдвига по времени и галилеева переноса — сложный режим, описывающий равноускоренно движущуюся волну с профилем, выражающимся через так называемую вторую трансцендентную функцию Пенлеве.

Предположим, что наше уравнение (или система уравнений) (13.26) допускает солитон, движущийся по какому-то закону. Из сказанного выше ясно, что этот закон должен быть первым интегралом уравнения (13.38), где Y — некоторая линейная комбинация инфинитезимальных операторов преобразований, не изменяющих вид уравнения (13.26). Поскольку закон движения связывает пространственные координаты и время, при выборе Y можно учитывать лишь те инфинитезимальные операторы, действие которых затрагивает независимые переменные системы (13.26).

Поясним сказанное на примере. Выясним, при каких законах движения могут существовать нерасплывающиеся волновые пакеты в одномерном уравнении Шрёдингера для пустого пространства

$$i\psi_t = \psi_{xx}. \quad (13.40)$$

Уравнение (13.40), как любое линейное уравнение, допускает преобразование вида

$$\psi' = \psi_1 + \alpha\psi_2, \quad (13.41)$$

где ψ_1 и ψ_2 — любые решения уравнения (13.40), α — параметр преобразования (константа). Преобразованию (13.41) соответствует инфинитезимальный оператор

$$X = \psi_2 \frac{\partial}{\partial u}. \quad (13.42)$$

Остальные преобразования, не изменяющие вид уравнения (13.40), порождены инфинитезимальными операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (13.43)$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (13.44)$$

$$X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \quad (13.45)$$

$$X_4 = u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v}, \quad (13.46)$$

$$X_5 = v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v}, \quad (13.47)$$

$$X_6 = 2t \frac{\partial}{\partial x} + xv \frac{\partial}{\partial u} - xu \frac{\partial}{\partial v}, \quad (13.48)$$

$$X_7 = 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 4xt \frac{\partial}{\partial x} - (2xu - x^2v) \frac{\partial}{\partial u} - (x^2u + 2tv) \frac{\partial}{\partial v}, \quad (13.49)$$

где

$$u = \operatorname{Re} \psi, v = \operatorname{Im} \psi. \quad (13.50)$$

Конечные преобразования, порождаемые инфинитезимальными операторами X_1 – X_7 , имеют следующий смысл:

X_1 — сдвиг по t :

$$t' = t + \alpha, \quad x' = x, \quad \psi' = \psi, \quad (13.51)$$

X_2 — сдвиг по x :

$$t' = t, \quad x' = x + \alpha, \quad \psi' = \psi, \quad (13.52)$$

X_3 — аффинное преобразование независимых переменных:

$$t' = e^{2\alpha}t, \quad x' = e^\alpha x, \quad \psi' = \psi, \quad (13.53)$$

X_4 — преобразование подобия функции ψ :

$$t' = t, \quad x' = x, \quad \psi' = e^\alpha \psi, \quad (13.54)$$

X_5 — фазовое преобразование (гиперболический поворот в плоскости $\text{Re } \psi, \text{Im } \psi$):

$$t' = t, \quad x' = x, \quad \psi = e^{-i\alpha} \psi, \quad (13.55)$$

X_6 — галилеев перенос:

$$t' = t, \quad x' = x + 2\alpha t, \quad \psi' = e^{-i(\alpha x + t\alpha^2)} \psi, \quad (13.56)$$

X_7 — проективное преобразование (инверсия) пространства-времени.

Рассмотрим некоторые (частично) инвариантные решения. Инфинитезимальный оператор

$$Y = X_1 + \alpha X_2, \quad \alpha \neq 0 \quad (13.57)$$

порождает плоские волны. Уравнению (13.38) соответствует сопряженная система обыкновенных дифференциальных уравнений в характеристиках

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a}, \quad (13.58)$$

допускающая первый интеграл

$$I_1 = x - at. \quad (13.59)$$

Подставляя в (13.38) $\psi = \Phi(x - at)$, получаем для Φ уравнение

$$\Phi'' + ia\Phi' = 0. \quad (13.60)$$

Откуда

$$\psi = \frac{i}{a} e^{-ia(x-at)}. \quad (13.61)$$

Все известные солитоны, зависящие от аргумента $x - at$, соответствуют плоским волнам (13.61). Их появление обусловлено тем, что соответствующие уравнения инвариантны относительно сдвигов по независимым переменным, так как коэффициенты этих уравнений не зависят от x и t .

Пусть теперь

$$Y = X_1 + bX_6. \quad (13.62)$$

Вводя

$$u = \operatorname{Re} \psi, \quad \nu = \operatorname{Im} \psi, \quad (13.63)$$

запишем оператор Y в виде

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} + 2bt \frac{\partial}{\partial x} - ibx\psi \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (13.64)$$

Соответствующая ему система сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2bt} = \frac{d\psi}{-ibx\psi}. \quad (13.65)$$

Подсистема

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2bt} \quad (13.66)$$

дает первый интеграл

$$I_1 = x - bt^2. \quad (13.67)$$

Еще один первый интеграл найдем из подсистемы

$$\frac{dx}{2bt} = \frac{d\psi}{-ibx\psi}. \quad (13.68)$$

Чтобы исключить x , воспользуемся уже известным первым интегралом (13.67)

$$dx = 2bt dt. \quad (13.69)$$

Подставляя (13.63) в (13.62) и полагая $x = I_1 + bt^2$, получаем

$$dt = \frac{d\psi}{-ib(I_1 + bt^2)\psi}, \quad (13.70)$$

откуда

$$I_2 = \psi e^{i b t (x^2 - (2/3) b t^2)}. \quad (13.71)$$

Следовательно, ψ надлежит искать в виде

$$\psi = e^{-i b t (x - (2/3) b t^2)} \Phi(x - bt^2), \quad (13.72)$$

где Φ — пока неизвестная функция.

Подставляя (13.72) в (13.40), получаем

$$\Phi'' + b\xi\Phi = 0, \quad \xi = x - bt^2. \quad (13.73)$$

Следовательно, в качестве Φ можно выбрать функцию Эйри. Решение (13.72) соответствует равноускоренному решению уравнения Кортевега—де Фриса, представимому через существенно трансцендентную функцию Пенлеве.

Итак, мы показали, что уравнение (13.40) допускает нерасплывающиеся волновые пакеты двух типов: плоские волны (13.61), движущиеся равномерно, и волновые пакеты (13.72), профилированные по функции Эйри и движущиеся равноускоренно.

Допускает ли уравнение (13.40) решения, движущиеся по какому-нибудь другому закону, т. е. зависящие от аргумента

$$x + \varphi(t), \quad (13.74)$$

где $\varphi(t)$ — некоторая нелинейная и неквадратичная функция времени t ?

Прежде всего заметим, что инвариантные решения можно исключить из рассмотрения, так как аргумент (13.74) должен быть первым интегралом системы обыкновенных дифференциальных уравнений, сопряженной оператору Y — некоторой линейной комбинации инфинитезимальных операторов (13.43)–(13.49). Так как закон движения устанавливает зависимость только между пространственными координатами и временем, достаточно рассмотреть только сужения операторов (13.43)–(13.49) на пространство независимых переменных x и t , т. е. линейную комбинацию

$$\begin{aligned} Y &= a \frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x} + c \left(x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \right) + \\ &+ d \left(2t \frac{\partial}{\partial t} \right) + e \left(4t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 4tx \frac{\partial}{\partial x} \right) = \\ &= (a + 2ct + 4et^2) \frac{\partial}{\partial t} + \\ &+ (b + cx + 4td + 4etx) \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (13.75)$$

Действуя оператором Y на предполагаемый первый интеграл $x + \varphi(t)$, получаем

$$(a + 2ct + 4et^2)\varphi'(t) + (b + cx + 2td + \varphi etx) = 0. \quad (13.76)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при x^0 и x , находим:

$$c + 4et = 0, \quad (13.77)$$

откуда

$$c = 0, \quad e = 0. \quad (13.78)$$

Лекция 13. Солитоны

Таким образом, первого интеграла

$$x + \varphi(t), \quad (13.79)$$

где $\varphi(t)$ — не линейная и не квадратичная функция, не существует.

Первый интеграл

$$x + \varphi(t)$$

заведомо не содержит преобразования подобия и проективного преобразования. Из соотношения

$$a\varphi'(t) + b + 2td = 0 \quad (13.80)$$

следует, что φ — не более чем квадратичная функция времени t .

Таким образом, уравнение Шрёдингера в пустоте (13.40) допускает только решения, которые движутся либо равномерно, либо равноускоренно.

Аналогичным образом находятся инвариантные солитонные решения и доказываются существование одних и несуществование других законов движения и в случае нелинейных эволюционных уравнений.

Вопросы и упражнения к лекции 13

1. Вычислить базис алгебры Ли, допускаемой уравнением Кадомцева—Первиашвили, и найти его решения, инвариантные относительно базисных инфинитезимальных операторов.
2. Решить Sh-Gordon уравнение методом обратной задачи теории рассеяния.

Лекция 14

КАМ-теория

Синергетический подход уделяет основное внимание изучению диссипативных систем. Между тем в нелинейной динамике немалую роль играют и консервативные, в частности, гамильтоновы системы. Их хаотические режимы отличаются от хаотических режимов в диссипативных системах. Связь между регулярными и хаотическими режимами в гамильтоновых системах описывает так называемая *КАМ-теория*, получившая свое название по инициалам своих создателей А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда и Ю. Мозера.

Интегрируемая гамильтонова система

Система с гамильтонианом $H'_0(p, q)$ называется интегрируемой, если существует каноническое преобразование $S(q, J)$ к новым переменным ϑ (угол), J (действие):

$$\begin{aligned} q, p &= \frac{\partial S(q, J)}{\partial q} \leftrightarrow J, \\ \vartheta &= \frac{\partial S(q, J)}{\partial J}, \end{aligned} \tag{14.1}$$

при переходе к которым гамильтониан зависит только от переменных действий J (и не зависит от угловых переменных ϑ).

Функция $S(q, J)$ при этом удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби:

$$H_0' \left[q, \frac{\partial S(q, J)}{\partial q} \right] = H_0(J). \quad (14.2)$$

В новых переменных J, ϑ уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \vartheta} = 0, \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial H_0}{\partial J} = \omega(J) \end{aligned} \quad (14.3)$$

и легко могут быть проинтегрированы:

$$\begin{aligned} J &= \text{const}, \\ \vartheta &= \omega t + \sigma. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Гармонический осциллятор

Гамильтониан:

$$H_0' = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2). \quad (14.5)$$

Уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] &= H_0(J); \\ \frac{\partial S}{\partial q} &= \sqrt{2H_0 - \omega^2 q^2}. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Действие:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S}{\partial q} dq = \frac{H_0(J)}{\omega}; \quad (14.7)$$

$$H_0(J) = J\omega. \quad (14.8)$$

Интегрирование производится по периоду изменения переменной q .

Уравнения движения в переменных «действие — угол»:

$$\dot{J} = -\frac{\partial H_0}{\partial \vartheta} = 0 \rightarrow J = \text{const}, \quad (14.9)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H_0}{\partial J} = \omega \rightarrow \vartheta = \omega t + \sigma. \quad (14.10)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\partial S}{\partial J} = \frac{\partial}{\partial J} \int dq \sqrt{2H_0 - \omega^2 q^2} = \\ &= \arccos \left(q \sqrt{\frac{\omega}{2J}} \right), \end{aligned} \quad (14.11)$$

$$q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \cos \vartheta, \quad (14.12)$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2J\omega} \sin \vartheta. \quad (14.13)$$

Траектория точки с координатами (q, p) в фазовом пространстве имеет форму эллипса, который при переходе к полярным координатам \sqrt{J}, ϑ превращается в окружность.

Сопоставляя формулы (14.3), (14.4) и (14.12), (14.13), нетрудно понять, что уравнения движения любой интегрируемой системы с n степенями свободы в переменных действие —

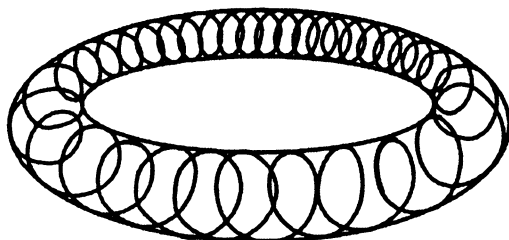


Рис. 67. Траектория интегрируемой гамильтоновой системы при рациональном отношении частот $\omega_1/\omega_2 = m/s$

угол имеют такой же вид, как уравнения движения для n несвязанных гармонических осцилляторов. Единственное отличие состоит в том, что в случае произвольной интегрируемой системы частоты ω_i — функции переменных действия J , тогда как в случае гармонических осцилляторов частоты от переменных действий не зависят. Существование n интегралов движения J_1, J_2, \dots, J_n означает, что в $2n$ -мерном фазовом пространстве интегрируемой гамильтоновой системы траектория принадлежит n -мерному множеству, которое по аналогии с окружностью в случае одного гармонического осциллятора обладает топологией n -мерного тора (прямого произведения n окружностей).

Траектория имеет вид обмотки. Если отношение частот по меридианам и параллелям рационально:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{s}, \quad (14.14)$$

где m и s — взаимно простые числа, траектория замыкается (рис. 67). Если же отношение частот иррационально, то траектория всюду плотным образом заполняет поверхность n -мерного тора. В этом случае движение эргодично (среднее по времени равно среднему по фазовому пространству).

Возмущение интегрируемого гамильтониана

Добавим к интегрируемому гамильтониану $H_0(J)$ малое возмущение:

$$H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon H_1(J, \vartheta). \quad (14.15)$$

Что произойдет при этом с траекториями и инвариантными торами? Ответ на этот вопрос дает КАМ-теория (К — А. Н. Колмогоров, А — В. И. Арнольд, М — Ю. Мозер). Черновой набросок этой теории был сформулирован в докладе А. Н. Колмогорова на Международном математическом конгрессе в Амстердаме (1954). Позднее теория была развита В. И. Арнольдом (1963) и Ю. Мозером (1967).

Согласно КАМ-теории, торы, на которых обмотка «недостаточно иррациональна», т. е. отношение частот не удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m}{s} \right| > \frac{K(\varepsilon)}{S^{2,5}}, \quad (14.16)$$

где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K(\varepsilon) = 0,$$

становятся неустойчивыми и разрушаются. Последним разрушается тор с

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \quad (14.17)$$

По теории КАМ, наряду с разрушением одних торов происходит рождение более мелких торов, которым в сечении Пуанкаре соответствуют эллиптические неподвижные точки, перемежающиеся с гиперболическими неподвижными точками. Процесс разрушения одних торов и рождения других более

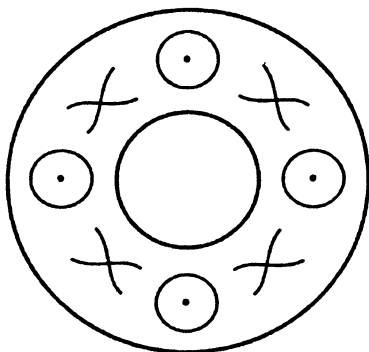


Рис. 68. Разрушение инвариантных торов при возмущении интегрируемой гамильтоновой системы и возникновение более мелких торов

мелких продолжается и порождает самоподобное распределение эллиптических и гиперболических неподвижных точек в сечении Пуанкаре.

Гомоклинический хаос

Рассмотрим более подробно то, что происходит в окрестности гиперболических неподвижных точек H (рис. 69). Из гиперболической неподвижной точки H выходит неустойчивая кривая W_u (u — от англ. unstable — неустойчивый), а в точку H входит устойчивая кривая W_s (s — от англ. stable — устойчивый). Каждая из этих кривых не самопересекающаяся, но они могут пересекаться друг с другом. Пусть H_0^1 — такая точка пересечения кривых W_s и W_u . Выберем на кривой W_u точку H_1 а на кривой W_s — точку H_2 . Точка H_0^1 (гомоклиническая, так как кривые W_s и W_u принадлежат одной и той же гиперболической точке H) не является неподвижной точкой отображения T , индуцируемого в плоскости сечения Пуанкаре (плоскости рис. 69) динамической системы в фазовом пространстве, поэтому $TH_0^1 \neq H_0^1$.

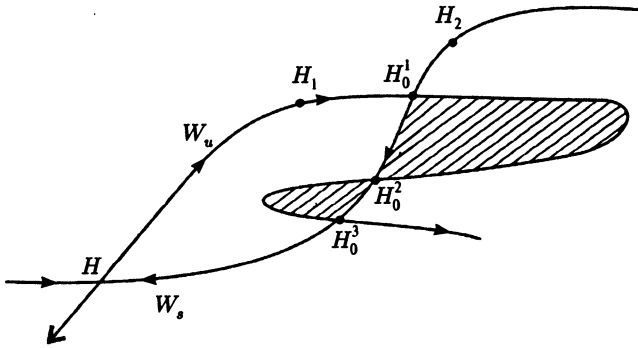


Рис. 69. Возникновение гомоклинического хаоса

Отображение T непрерывно, и не меняет «хронологической последовательности» точек на кривых W_s и W_u . Точка H_0^1 лежит «в будущем» относительно точек H_1 и H_2 поэтому и ее образ TH_0^1 должен лежать «в будущем» относительно образов TH_1 и TH_2 . Но $TH_1 \in W_u$, а $TH_2 \in W_s$, т. е. образы точек H_1 и H_2 лежат на различных кривых W_s и W_u . Кажущееся противоречие легко разрешимо, если кривая W_u еще раз (с помощью точки H_0^1) пересекается с кривой W_s , например, в точке H_0^2 . Эта точка (также гомоклиническая) и будет образом точки H_0^1 :

$$H_0^2 = TH_0^1. \quad (14.18)$$

Повторяя те же рассуждения применительно к новой гомоклинической точке H_0^2 , мы приходим к заключению о существовании третьей гомоклинической точки H_0^3 и т. д.

Таким образом, из существования гомоклинической точки H_0^1 следует существование счетной последовательности гомоклинических точек $\{H_0^i\}$, $i = 1, 2, \dots$, сходящихся к гиперболической точке H . Петли, образуемые кривыми, становятся все уже (тоньше), а поскольку в фазовом пространстве действует

гамильтонова (консервативная) система, то преобразование T сохраняет площадь, и поэтому площади, охватываемые петлями, равны.

Впервые картину гомоклинического хаоса увидел (мысленным взглядом) Анри Пуанкаре, работая над проблемой трех тел на соискание премии норвежского короля Оскара II. О своих впечатлениях он весьма красочно писал позднее в своем труде «Новые методы небесной механики»:

Если попытаться представить себе фигуру, образованную этими двумя кривыми и их бесчисленными пересечениями, каждое из которых соответствует двояко-асимптотическому решению, то эти пересечения образуют нечто вроде решетки, сети с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых никогда не должна пересекать самое себя, но она должна навиваться на самое себя очень сложным образом, чтобы пересечь бесконечно много раз все петли сети.

Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел и, вообще, всех задач динамики, в которых нет однозначного интеграла и в которых ряды Болина расходятся.

Р. И. Богданов распространил КАМ-теорию на слабодиссипативные системы.

Вопросы и упражнения к лекции 14

Покажите, что система Хенона—Хейлеса с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2x + p^2y + Ax^2 + By^2) + Dx^2y - \frac{1}{3}Cy^3,$$

где A , B , C и D — подгоночные параметры, интегрируема в следующих четырех случаях:

а) $\frac{D}{C} = 0$, A и B — любые;

б) $\frac{D}{C} = 1$, $\frac{A}{B} = 1$;

в) $\frac{D}{C} = -1$, A и B — любые;

г) $\frac{D}{C} = -\frac{1}{16}$, $\frac{A}{B} = \frac{1}{16}$.

Литература

1. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.
2. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Физматгиз, 1987.
3. *Лихтенберг А., Либерман Н.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
4. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
5. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
6. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
7. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. 5-е изд. М.: УРСС, 2003.
8. *Арнольд В. И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: РХД, 1999.
9. *Биркгоф Д. Д.* Динамические системы. М.; Л.: ОГИЗ, 1941.
10. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
11. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. А., Томаненко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986.
12. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.

Литература

13. *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.
14. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000.
15. *Баренблат Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1982.
16. *Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов. М.: Мир, 1993.
17. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.
18. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
19. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.; Ижевск: РХД, 2000.
20. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. 3-е изд. М.: Физматгиз, 1981.
21. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
22. *Жаботинский А. М.* Концентрационные колебания. М.: Наука, 1974.
23. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Л. И.* Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний // УФН. 1979. Т. 128. С. 579–624.
24. Солитоны. Новокузнецк: Физико-математический ин-т, 1999.
25. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
26. *Манин Ю. И.* Итоги науки и техники. 1978.
27. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: УРСС, 2001.
28. *Арнольд В. И.* Задачи Арнольда. М.: Фазис, 2000.
29. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Новокузнецк: Физико-математический ин-т, 1998.